1) Berechnen Sie:

(i) $\int \left(2x^5 - \frac{1}{x^2} - \frac{1}{x} + e^{4x}\right)\, dx = \boxed{}$

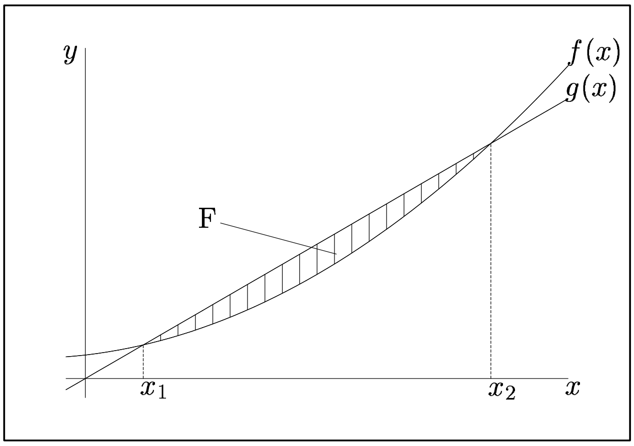
(ii) $\int \frac{1}{\sqrt{x-1}} e^{\sqrt{x-1}}\, dx = \boxed{}$

(iii) $\int_1^2 x \ln(x)\, dx = \boxed{}$

2) Die folgende Skizze zeigt die Graphen der Funktionen f und g mit

$$\begin{aligned} f(x) &= 3x^2 + 18x + 189 \\ g(x) &= 90x \end{aligned}$$

Skizze:



Berechnen Sie den Flächeninhalt F der schraffierten “Linse”.
Lösung:

F= $\boxed{}$

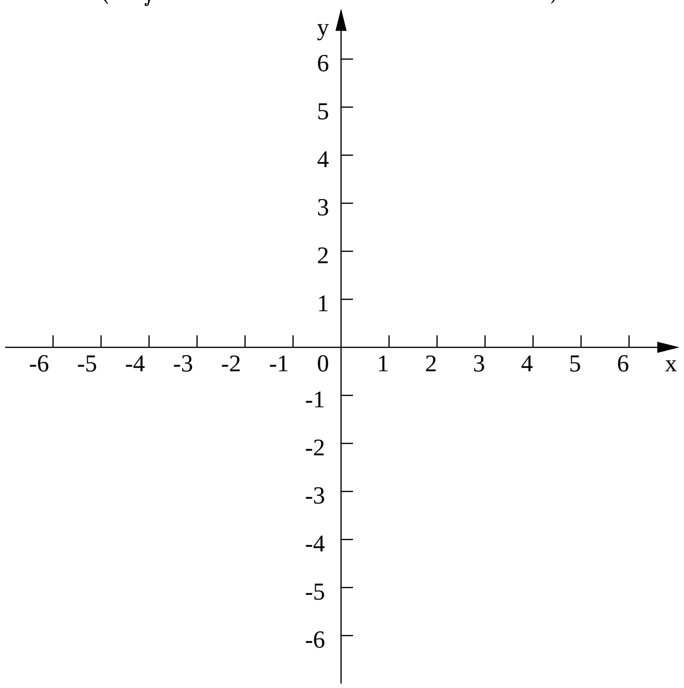
Rechnungen:

Aufgabe 2 : **12 Punkte**

Durch den Ausdruck $f(x,y) = \sqrt{9 - x^2y^2}$ soll eine Funktion f überall dort definiert werden, wo dieser Ausdruck sinnvoll ist.

(i) Bestimmen Sie den Definitionsbereich D_f von f.

- Formel: $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid$
- Skizze: (D_f schraffie einzeichnen.)



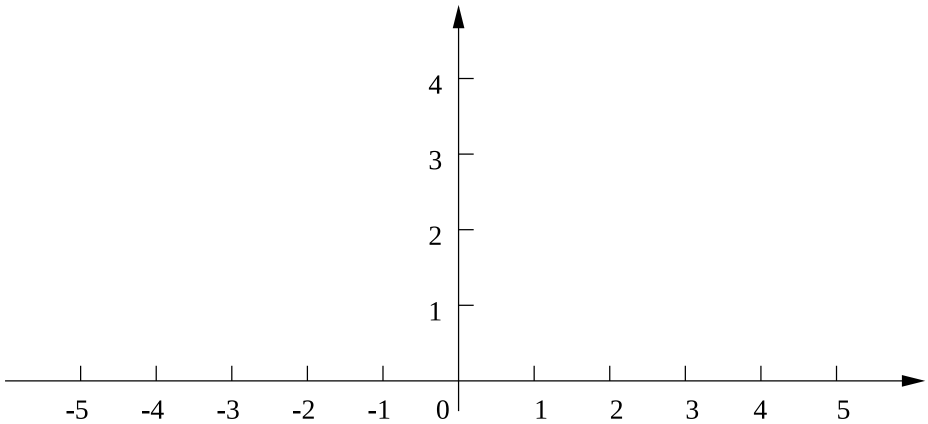
(ii) Skizzieren Sie in diesem Diagramm die beiden Geraden bzw. Strecken, entlang derer die Vertikalschnitte "$x = 1$" und "$y = 2 - x$" geführt werden. (Beschriftung !)

Rechnungen:

(iii) Skizzieren Sie den Graphen des Vertikalschnittes "$x = 1$".

Formel: $f(1, y) =$ $\qquad$ für $y \in$

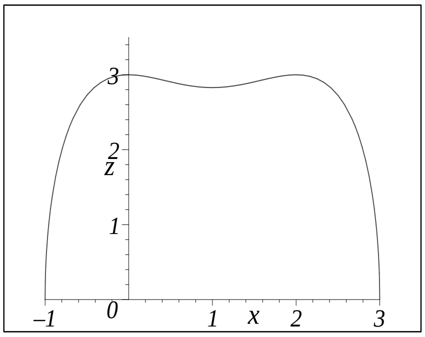
Skizze:



Ergänzen Sie: Bei der skizzierten Kurve handelt es sich um ...

(iv) Das folgende Diagramm zeigt den Graphen der Funktion

$$x \mapsto \sqrt{9 - x^2(2-x)^2}\ ,\ x \in [-1, 3].$$



Begründen Sie: Die Funktion f (mit $f(x, y) = \sqrt{9 - x^2y^2}$) ist weder konvex noch konkav, weil ...

Aufgabe 3 : **22 Punkte**

Ein Unternehmen erzielt beim Einsatz von x bzw. y Mengeneinheiten zweier Produktionsfaktoren X und Y einen Gewinn von

$$G(x,y) = 16xy - x^4 - y^4$$

Geldeinheiten. Es gelten die Kapazitätsbeschränkungen

$$\left.\begin{array}{ccccl} 0 & \leq & x & \leq 3 & \text{[ME] und} \\ 0 & \leq & y & \leq 3 & \text{[ME].} \end{array}\right\} \quad (*)$$

Aufgabe:

(i) Bestimmen Sie die gewinnmaximale Faktoreinsatzmengenkombination (x_{max}, y_{max}) und den Maximalgewinn G_{max} !

(ii) Bei welcher Faktoreinsatzmengenkombination (x_V, y_V) entsteht der größte Verlust? Wie groß ist dieser?

Lösungshinweis

- Bestimmen Sie zunächst die stationären Punkte von G und klassifizieren Sie diese mit Hilfe der zugehörigen Hesse-Matrix.
- Untersuchen Sie anschließend, ob auf dem Rand des durch $(*)$ gegebenen Definitionsbereiches weitere Extrempunktkandidaten liegen.
  Aus Symmetriegründen ($G(x,y) = G(y,x)$) genügt es, die in der Skizze auf Seite 8 dick eingezeichneten Ränder R_1 und R_2 zu betrachten. Eine ausführliche Kurvendiskussion ist unnötig !
- "Kartieren" Sie alle so gefundenen möglichen Extrempunktkandidaten in der Skizze unter Angabe der zugehörigen Funktionswerte und werten Sie diese aus !

Endergebnis:

Maximalgewinn G_{max}:				[GE]				
zugehöriger Faktoreinsatz:	x_{max}	=		[ME]				
	y_{max}	=		[ME]				
größtmöglicher Verlust:				[GE]				
zugehöriger Faktoreinsatz:	x_V	=		[ME]	oder x_V	=		[ME]
	y_V	=		[ME]	y_V	=		[ME]

Rechnungen:

Erinnerung: $G(x,y) = 16xy - x^4 - y^4$ auf $D = [0,3] \times [0,3]$

Gradient und Hesse-Matrix:

$\nabla G(x,y) =$

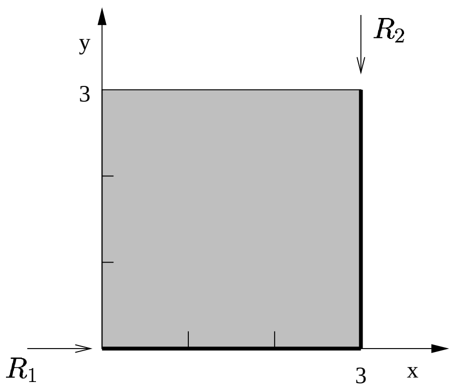
$\nabla^2 G(x,y) =$

Tabelle der stationären Punkte:

Nr.i	x^i	y^i	$G(x^i,y^i)$	$\nabla^2 G(x^i,y^i)$	H_1	H_2	Art des Punktes

Rechnung: (Ermittlung der stationären Punkte)

Skizze des Definitionsbereiches mit möglichen Extremstellen:



Untersuchung der Ränder R_1, R_2: **(2. Ableitungen werden nicht benötigt ! Wurzelausdrücke können stehenbleiben !)**

Tabelle von Extrempunktkandidaten

Nr. i	x^i	y^i	$G(x^i, y^i)$	Art des Punktes (z.B. lokaler Maximumpunkt bzgl. R_1)
1				
2				
3				
4				

Rechnungen zur Randuntersuchung: (Auf die Berechnung 2.Ableitungen kann verzichtet werden, weil eine Kartierung erfolgt.)

Aufgabe 4 : **14 Punkte**

Gegeben sei die Funktion $f : I\!R^2 \mapsto I\!R$ durch

$$f(x,y) = x^2 + 10y\ .$$

(i) Ermitteln Sie alle Punkte $(x,y) \in I\!R^2$, bei denen die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines relativen Extremums von f unter der Nebenbedingung

$$2y^2 + x^2 = 32 \qquad \text{(NB)}$$

erfüllt sind, mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode. Geben Sie jeweils den Wert des Lagrangeschen Multiplikators und den zugehörigen Funktionswert von f mit an.

Lagrange-Funktion $I\!L$ und ihre partiellen Ableitungen:

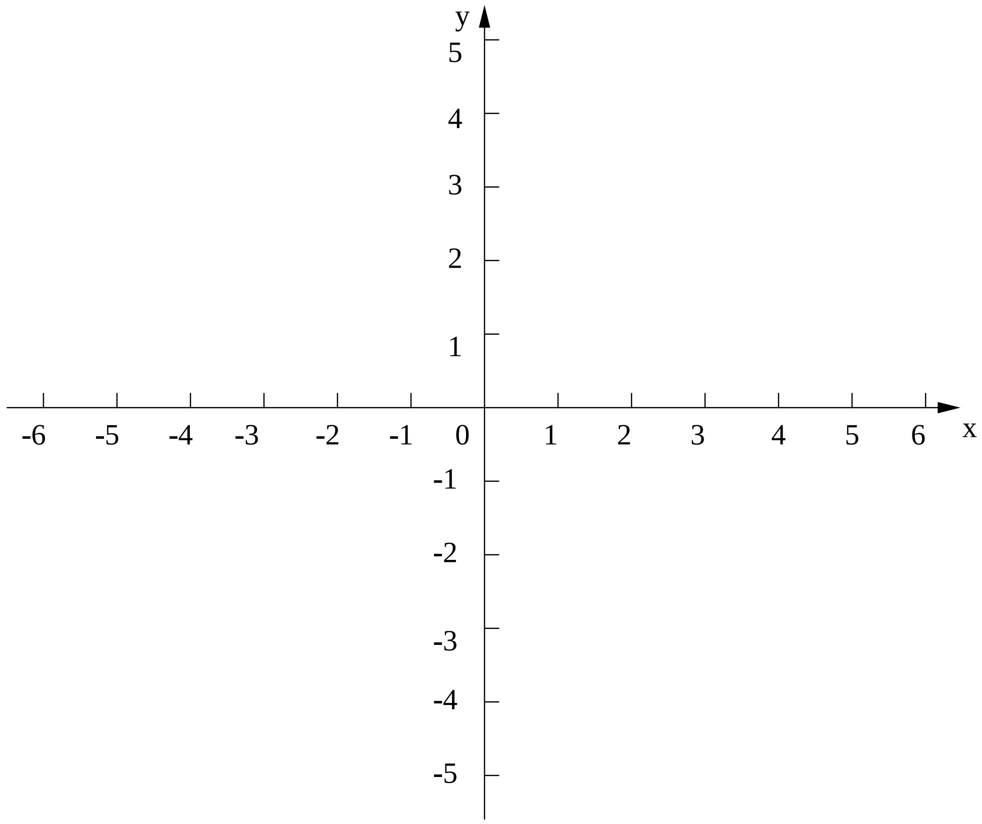
$I\!L(x,y,\lambda)$ =		
$I\!L_x$ =		(1)
$I\!L_y$ =		(2)
$I\!L_\lambda$ =		(3)

Nebenrechnungen:

Tabelle stationärer Punkte von $\mathbb{L}$ und zugehöriger Funktionswerte:

Nr. i	x_i	y_i	λ_i	$f(x_i, y_i)$

(ii) Skizzieren Sie die Nebenbedingungskurve und die tabellierten Punkte in folgendem Diagramm. Geben Sie auch die zugehörigen Funktionswerte (in Kästchen) mit an.



(iii) Angenommen, f sei eine Produktionsfunktion und (NB) eine technologische Nebenbedingung. Welche Faktoreinsatzkombination (x^*, y^*) führt bei Einhaltung dieser Nebenbedingung zu maximaler Produktion?

Antwort:

$(x^*, y^*) = \boxed{}$

Rechnungen zur Wahlmöglichkeit A:

Ein Gut werde nach der Produktionsfunktion

$$P(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy\ ,\ \ x,y \geq 0$$

produziert (wobei x und y die eingesetzten Mengen zweier Produktionsfaktoren X bzw. Y bezeichnen).

(i) Bestimmen Sie das totale Differential von P

- allgemein:

$dP=$ $\boxed{}$

- an der Stelle $(x_0, y_0) = (2,4)$:

$dP=$ $\boxed{}$

(ii) Bestimmen Sie damit näherungsweise

$P(2.01; 4.05) \approx$ $\boxed{}$

(iii) Geben Sie die Funktionsdarstellung der Tangentialebene an den Graphen von P über dem Punkt $(x_0, y_0) = (2,4)$ an:

$T_{(2,4)}(x,y)=$ $\boxed{}$

(iv) Die momentanen Faktoreinsatzmengen $x_0 = 2$, $y_0 = 4$ sollen um geringfügige Beträge Δx bzw. Δy erhöht werden. Wie ist das Verhältnis $\Delta x\ :\ \Delta y$ zu wählen, damit die Produktionszuwachsrate möglichst groß wird, und zwar wie groß ?

$\Delta x\ :\ \Delta y=$ $\boxed{}$, maximale Zuwachsrate von $P=$ $\boxed{}$

Aufgabe 5 : **WAHLMÖGLICHKEIT B** **8 Punkte**

Ein Gut werde nach der Produktionsfunktion

$$P(x,y) = x^2 + 2y^2 + xy \ , \ \ x, y \geq 0$$

produziert (wobei x und y die eingesetzten Mengen zweier Produktionsfaktoren X bzw. Y bezeichnen).

(i) Bestimmen Sie die partielle Elastizität von P bezüglich x

- allgemein: für $(x,y) \neq (0,0)$

  $\varepsilon_{P,x}(x,y) =$

- an der Stelle $(x_0, y_0) = (2,4)$:

  $\varepsilon_{P,x}(2,4) =$

(ii) Interpretieren Sie den zuletzt gefundenen Wert:

(iii) Berechnen Sie

$- \frac{P_x(x,y)}{P_y(x,y)} =$, $- \frac{P_x(2{,}4)}{P_y(2{,}4)} =$

Interpretieren Sie den zuletzt gefundenen Wert mathematisch und ökonomisch. Welcher Zusammenhang besteht zu einer Isoquante von P (und zwar zu welcher) ?

(iv) Streichen und/oder ergänzen Sie zu einer wahren Aussage mit Begründung:

P *ist* $\left\{ \begin{array}{l} \textit{nicht homogen, weil} \\ \textit{homogen vom Grade} \end{array} \right\}$ ______________________________

____

____

Rechnungen :

Aufgabe 5 : **WAHLMÖGLICHKEIT C** **8 Punkte**

Wir betrachten die durch

$$f(x,y) = (y+1)^3 + y(x+10) + \frac{1}{2}x^2$$

auf $D = [0,\infty) \times [0,\infty)$ definierte Funktion f.
Streichen Sie grau unterlegte Textteile, und/oder ergänzen Sie so, daß wahre Aussagen mit Begründung entstehen.

(i) f ist auf D **nicht** konvex, denn ______________________

____

____

(ii) f ist auf D **nicht** nach unten beschränkt, **denn** **und zwar durch** ________

____

(iii) f ist auf D **nicht** nach oben beschränkt, **denn** **und zwar durch** ________

____

(iv) f ist auf D **weder** monoton **wachsend** **noch** **fallend** , denn

____

____