AUFGABE 1 : **12 Punkte**

(i) Für das Integral $I = \int_0^2 (1+2x)e^x dx$ ist mit Hilfe der KEPLERschen Faßregel ein Näherungswert $\tilde{I}_{\text{Kepler}}$ zu bestimmen. Geben Sie diesen zunächst exakt an (d.h., ohne eventuell auftretende Potenzen von e mit dem Taschenrechner zu berechnen).

i	0	1	2
x_i			
y_i			

Schrittweite: $\Delta = \ldots\ldots\ldots$

Exakte Form des Näherungswertes:

$\tilde{I}_{\text{Kepler}} = \boxed{}$

dieser Wert ist näherungsweise (Taschenrechner!)

$\tilde{I}_{\text{Kepler}} \approx \boxed{}$

Rechnungen:

(ii) Berechnen Sie das unter (i) genannte Integral exakt (z.B. mit Hilfe partieller Integration).

$$I = \int_0^2 (1+2x)e^x dx = \boxed{}$$

Näherung (Taschenrechner) $I \approx \boxed{}$

(iii) Bestimmen Sie unter Verwendung der Substitutionsmethode

$$\int \tfrac{1}{\sqrt{2x}} e^{\sqrt{2x}} dx = \boxed{}$$

Rechnungen:

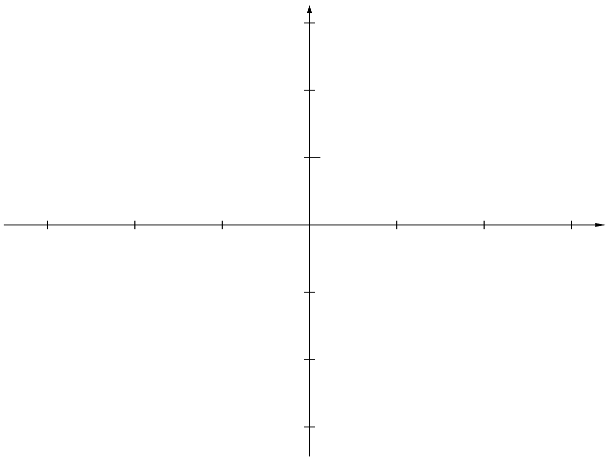
AUFGABE 2 : **20 Punkte**

Durch den Ausdruck

$$f(x, y) := \sqrt{1 + xy}$$

soll eine Funktion f für die Paare $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ definiert werden, für die dieser Ausdruck sinnvoll ist.

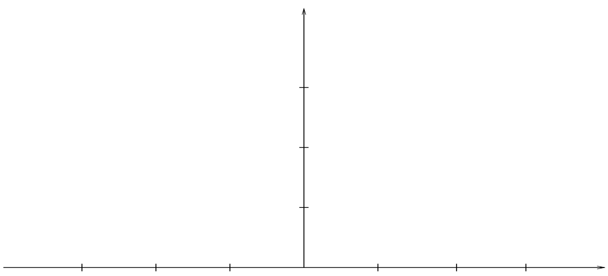
(i) Skizzieren Sie den Definitionsbereich D_f (schraffiert) in nachfolgendem Diagramm:
Geben Sie mindestens 2 Punkte an, die auf dem Rand von D_f liegen.



(ii) Skizzieren Sie den Vertikalschnitt "$x = \frac{1}{2}$" von f:

Formel: $f\left(\frac{1}{2}, y\right) = \boxed{}$

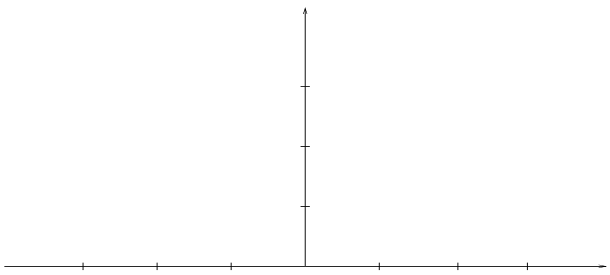
Geben Sie 2 Punkte an, die auf dem Graphen des Schnittes liegen!



(iii) Skizzieren Sie den Vertikalschnitt "$y = -x$" von f (als Funktion von x):

Formel: $f(x, -x) =$

Geben Sie 2 Punkte an, die auf dem Graphen des Schnittes liegen!



(iv) (Erinnerung: $f(x,y) := \sqrt{1+xy}$)
Skizzieren Sie den Vertikalschnitt "$y = x$" von f (als Funktion von x)!

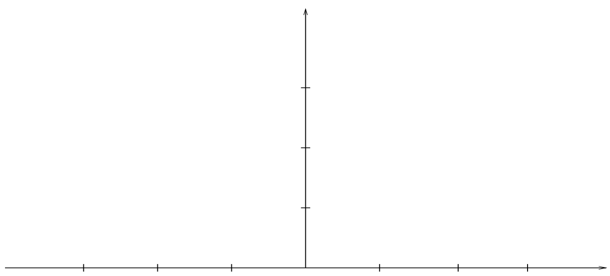
Formel: $f(x,x) =$ $\boxed{}$ definiert für $x \in$ $\boxed{}$.

Untersuchen Sie das Monotonie- und Krümmungsverhalten *dieser* Schnittkurve anhand ihrer Ableitungen.

Rechnung:

$$\frac{d}{dx} f(x,x) \ =$$

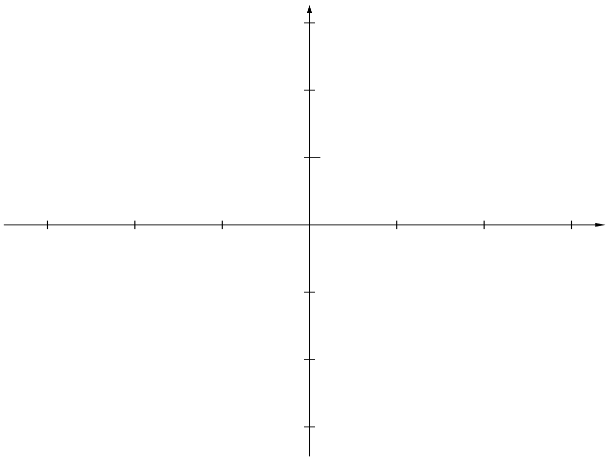
$$\frac{d^2}{dx^2} f(x,x) =$$



Der Vertikalschnitt $x \mapsto f(x,x)$ ist ...
(Zutreffendes ankreuzen, Nichtzutreffendes streichen, Text ergänzen:)

- ○ streng monoton wachsend für x ....
- ○ streng monoton fallend für x ....
- ○ strikt konvex
- ○ strikt konkav

(v) (Erinnerung: $f(x,y) = \sqrt{1+xy}$)
Skizzieren Sie die Höhenlinie "$f(x,y) = \sqrt{2}$".
Geben Sie 2 Punkte an, die auf der Höhenlinie liegen.



(vi) Stellen Sie unter Ausnutzung von (ii) – (v) fest, welche Eigenschaften die Funktion $(x,y) \mapsto f(x,y)$ insgesamt besitzt:

– f ist nach unten beschränkt

○ JA, und zwar durch die Konstante ....

○ NEIN, denn ....

– f ist nach oben beschränkt

○ JA, und zwar durch die Konstante ....

○ NEIN, denn ....

– f ist konvex/konkav,

○ JA, weil ....

○ NEIN, weil ....

AUFGABE 3 : **20 Punkte**

Durch $f(x,y) := (x^2 - 16)(25 - y^2) + 400,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$ wird auf $\mathbb{R}^2$ eine Funktion f definiert.

(i) Man untersuche f auf lokale und globale Extremwerte.

(ii) Man untersuche, ob die Funktion $f-$ eingeschränkt auf den "ökonomischen Defintionsbereich" $D_{oec} := [0,4] \times [0,5]-$ sich zur Modellierung einer (Gesamt-) Kostenfunktion eignet.
(Überprüfen Sie, ob gilt
(1) $f(0,0) \geq 0$ *(nichtnegative Fixkosten)*
(2) $f'(x,y) \geq 0$ *für* $(x,y) \in D_{oec}$ *(f ist monoton wachsend)).*

(iii) Begründen Sie anhand der Ergebnisse von (i), warum sich f auf D_{oec} nicht zur Modellierung einer konkaven Nutzenfunktion eignet.

Lösung (i) Gradient (als Funktion von (x,y)):

$f'(x,y) = (\qquad\qquad\qquad\qquad)$

Hesse-Matrix (in Abhängigkeit von (x,y)) :

$f''(x,y) = \begin{pmatrix} & \\ & \end{pmatrix}$

Rechnungen: (Ermittlung der stationären Punkte):

- **Tabelle und Beurteilung aller stationären Punkte:**

Nr. i	Punkt x_i	y_i	Funktionsw.: $f(x_i, y_i)$	Hesse-Matrix $f''(x_i, y_i)$	Hesse-Det. $\|H_1\|$	$\|H_2\|$	Art des Punktes
1							
2							
3							
4							
5							

Besitzt die Funktion f auf $\mathbb{R}^2$ ein globales Minimum?

○ JA, und zwar an der Stelle $(x_{min}, y_{min}) = \boxed{}$

○ NEIN, weil ....

....

Lösung (ii) (Nichtzutreffendes streichen!)

- Es gilt $f(0,0) = \boxed{}$ $\boxed{< \mid \leq \mid = \mid \geq \mid >}$ 0.
- Für $(x,y) \in D_{oec} = [0,4] \times [0,5]$ gilt

  $f_x(x,y) = \boxed{}$ $\boxed{< \mid \leq \mid = \mid \geq \mid >}$ 0 und

  $f_y(x,y) = \boxed{}$ $\boxed{< \mid \leq \mid = \mid \geq \mid >}$ 0.

  Somit ist f auf D_{oec} (Zutreffendes ankreuzen)

  ○ monoton wachsend

  ○ monoton fallend

  ○ weder wachsend noch fallend.
- Daher ist f auf D_{oec} als Modell einer Gesamtkostenfunktion

  ○ geeignet

  ○ ungeeignet.

Lösung (iii)

f eignet sich nicht zur Modellierung einer konkaven Nutzenfunktion auf D_{oec}, weil D_{oec} einen

....-Punkt enthält und folglich

nicht konkav sein kann.

AUFGABE 4 : **20 Punkte**

Man untersuche mit Hilfe der LAGRANGEschen Multiplikatorenmethode die auf $\mathbb{R}^2$ durch

$$f(x,y) := x^2 y$$

definierte Funktion unter der Nebenbedingung

$$x + y^2 - 1 = 0 \tag{1}$$

auf lokale Extrema.

(i) Bestimmen Sie die Lagrangefunktion und ihre partiellen Ableitungen:

$\mathbb{L} \ = \mathbb{L}(x,y,\lambda) =$ ....

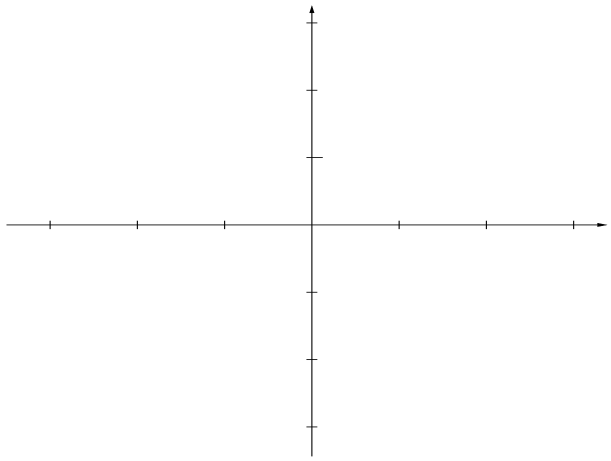
$\mathbb{L}_x =$ ....

$\mathbb{L}_y =$ ....

$\mathbb{L}_\lambda =$ ....

(ii) An 4 Punkten $(x^1, y^1), \ldots, (x^4, y^4)$ sind die notwendigen Bedingungen für das Vorliegen eines lokalen Extremums von f unter der Nebenbedingung (1) erfüllt. Tragen Sie diese in die nebenstehende Tabelle ein.

(iii) Skizzieren Sie die Nebenbedingungskurve im $\mathbb{R}^2$ und zeichnen Sie die Punkte $(x^1, y^1), \ldots, (x^4, y^4)$ in die Skizze ein. Geben Sie auch die zugehörigen Funktionswerte $f(x^i, y^i)$ mit an!



(iv) Kann anhand der Skizze beurteilt werden, ob und um welche Art von Extrempunkten es sich handelt?
(Ergänzen Sie die Tabelle.)

LÖSUNGSTABELLE

i	x_i	y_1	λ_i (exakt)	$f(x_i, y_i)$ (exakt)	Beurteilung des Punktes
1					
2					
3					
4					

NEBENRECHNUNGEN:

AUFGABE 5 : **6 Punkte**

Die Gewinnfunktion eines Unternehmens lautet

$$G(x,y) = 100 - 2(x-10)^2 - 4(y-12)^4 \quad [GE]$$

in Abhängigkeit von den Ausbringungsmengen x und y [in ME] zweier Güter X und Y.

(i) Bestimmen Sie das totale Differential von G allgemein und an der Stelle $(x_0, y_0) = (8, 11)$!

totales Differential von G allgemein:

$dG =$

totales Differential von G an der Stelle $(x_0, y_0) = (8, 11)$:

$dG =$

(ii) Bestimmen Sie den Zuwachs ΔG beim Übergang vom Punkt $(x_0, y_0) = (8, 11)$ zum Punkt $(x_1, y_1) = (8,1; 11,1)$ näherungsweise:

$\Delta G \approx$

(iii) Die momentanen Ausbringungsmengen $(x_0, y_0) = (8, 11)$ sollen geringfügig abgeändert werden, und zwar so, dass sich dadurch ein höchstmöglicher Gewinnzuwachs ergibt. Welche Proportion $\Delta x : \Delta y$ der Zuwächse von x und y ist dabei zu wählen?

$\Delta x : \Delta y =$