AUFGABE 1 :

(i) Berechnen Sie das folgende Integral näherungsweise mit Hilfe der Keplerschen Faßregel (=Simpsonformel für $n = 2$ Teilintervalle):

$$I := \int_3^5 \frac{1}{1+\sqrt{x}} dx$$

Hilfstabelle: (Wurzelausdrücke <u>nicht</u> mit dem Taschenrechner ausrechnen).

Schrittweite:

$\Delta = \boxed{}$

i	0	1	2
x_i			
y_i			

Wie lautet die Faßregel allgemein (unter Verwendung von Δ, y_0, y_1, y_2)?

$\tilde{I}_{Faß} =$

Konkret mit obigen exakten Zahlenwerten:

$\tilde{I}_{Faß} =$

Näherungswert (Taschenrechner):

$\tilde{I}_{Faß} \approx$

(ii) Berechnen Sie dasselbe Integral exakt (mit Hilfe der Substitutionsregel).

Erinnerung:

$$I = \int_3^5 \frac{1}{1+\sqrt{x}}dx$$

Substitution:

$$u =$$

$$\text{bzw. } x =$$

$$dx =$$

Exaktes Ergebnis (Wurzelausdrücke stehen lassen!)

$I =$

Näherung (Wurzelausdrücke mit dem Taschenrechner auswerten):

$I \simeq$

Rechnung:

AUFGABE 2 :

Durch den Ausdruck

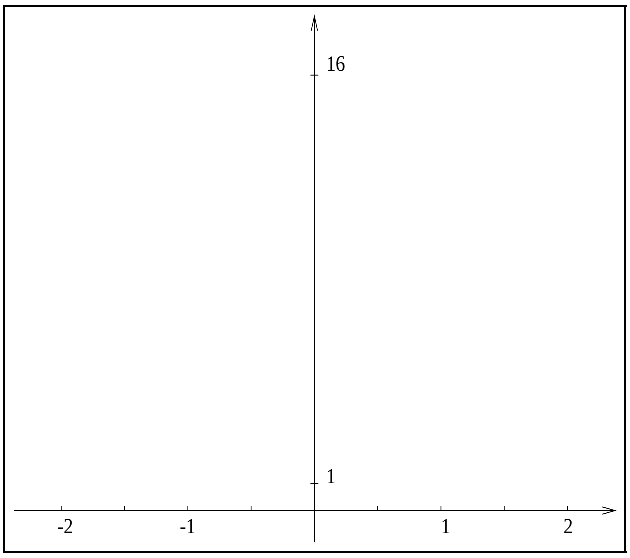
$$f(x,y) := \sqrt{4 - x^2\sqrt{y}}$$

soll eine Funktion f für alle Paare $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ definiert werden, für die dieser Ausdruck erklärt ist.

(i) Geben Sie den Definitionsbereich D_f von f an:

<u>Formel:</u> $D_f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \qquad\qquad\qquad\qquad \}$

<u>Skizze:</u> (D_f <u>schraffieren!</u> Geben Sie mindestens 3 Punkte an, die auf dem Rand von D_f liegen!)



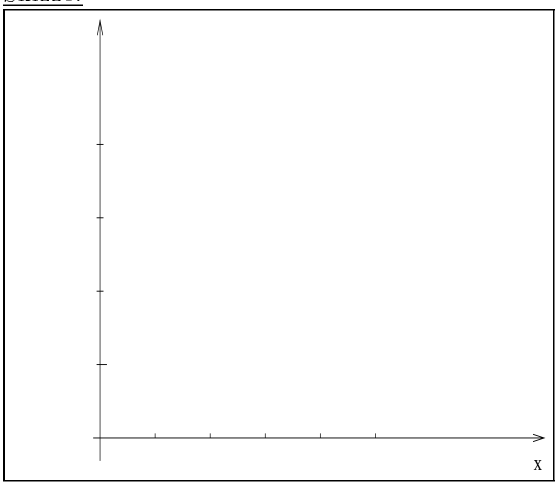
(ii) Ist der Definitionsbereich D_f von f beschränkt? JA NEIN

(iii) Ist der Defintionsbereich D_f von f konvex? JA NEIN

(iv) Geben Sie den Vertikalschnitt "$y = 1$" an:

Formel:

Skizze:



Geben Sie 3 Punkte an, die auf der Schnittkurve liegen!

Nebenrechnung:

Erinnerung:

$$f(x,y) := \sqrt{4 - x^2\sqrt{y}}$$

Zutreffendes ankreuzen:

(v) Ist f nach unten beschränkt? JA NEIN
Begründung:

....

(vi) Ist f nach oben beschränkt? JA NEIN
Begründung:

....

(vii) Kann f für $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ als Kostenfunktion angesehen werden? JA NEIN
Begründung:

....

(viii) als Gewinnfunktionangesehen werden? JA NEIN
Begründung:

....

AUFGABE 3 :

Auf $\mathbb{R}^2$ wird die Funktion f betrachtet mit

$$f(x,y) = 24xy - 16x^2 + \frac{4}{3}y^3 - 33y^2 + 128y - 80,$$

$(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

(i) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f = (f_x, f_y)$ von f (als Funktion von $(x,y) \in \mathbb{R}^2$)

$\nabla f(x,y) = (\qquad\qquad\qquad)$

(iii) Berechnen Sie die Hesse-Matrix $H = \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ von f und deren Determinante $|H| = det(H)$ (als Funktion von $(x,y) \in \mathbb{R}^2$).
Klammern Sie dabei Faktoren, die allen Elementen von H gemeinsam sind, aus der Matrix H aus.

Rechnung:

$H(x,y) = \nabla^2 f(x,y) =$

$det(H(x,y)) =$

(iv) Untersuchen Sie, auf welchen Teilmengen von $\mathbb{R}^2$ nachfolgende Aussagen zutreffen!

Aussage	trifft zu für
$\lvert H(x,y)\rvert > 0$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \qquad \}$
$\lvert H(x,y)\rvert = 0$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \qquad \}$
$\lvert H(x,y)\rvert < 0$	$\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \qquad \}$

(v) Geben Sie die größte konvexe Teilmenge K von $\mathbb{R}^2$ an, auf der f konkav ist. Begründen Sie Ihre Antwort:

$K = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \qquad \}$

f ist auf K konkav, weil

....

Außerhalb von K ist f in keiner Umgebung irgend eines Punktes konkav, weil

....

(vi) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f (d.h. Punkte (x_i, y_i) mit $\nabla f(x_i, y_i) = 0$) und untersuchen Sie diese daraufhin, ob es sich um lokale Extremstellen oder Sattelpunkte handelt.

Nr. des stationären Punktes

i	x_i	y_i	Art	Begründung
1				
2				

Rechnungen

Angenommen, als **ökonomischer** Definitionsbereich wäre die Menge $D_{oec} := [0,10] \times [0,6]$ gegeben.
(Erinnerung:

$$f(x,y) = 24xy - 16x^2 + \frac{4}{3}y^3 - 33y^2 + 128y - 80$$

(vii) Über welche Eigenschaften verfügt f auf D_{oec}?

1. $\mathbf{f(0,0) < 0}$ JA NEIN
   Begründung:

   ....

2. f **wächst monoton** JA NEIN
   Begründung:

   ....

3. f **ist konkav** JA NEIN
   Begründung:

   ....

4. f **ist nichtnegativ** (d.h. $f(x) \geq 0$ für alle $x \in D_{oec}$ JA NEIN
   Begründung:

   ....

(viii) Korrigieren, streichen bzw. ergänzen Sie:

f eignet sich auf D_{oec}	wegen
• **nicht** als Kostenfunktion	
• **nicht** als Nutzenfunktion	
• **nicht** als Gewinnfunktion	

(ix) Die folgenden Funktionswerte brauchen Sie nicht nachzurechnen:

$$\begin{aligned} f(0,6) &= -212 \\ f(10,0) &= -1680 \\ f(10,6) &= -372 \end{aligned}$$

Bestimmen Sie das Maximum und das Minimum von f auf dem ökonomischen Definitionsbereich:

$\max_{(x,y)\in D_{oec}} f(x,y) = \boxed{}$ $\min_{(x,y)\in D_{oec}} f(x,y) = \boxed{}$

<u>denn</u>

AUFGABE 4 :

Ein Unternehmen produziert 2 Güter X und Y. Die entstehenden Gesamtkosten betragen

$$K(x,y) = ln(2 + x^2 + y) + 2 \ \ [GE]$$

wobei $x \geq 0$ bzw. $y \geq 0$ die produzierten Mengen der Güter X bzw. Y bezeichnen (in ME_x bzw. ME_y). Die Güter X und Y lassen sich zu den konstanten Marktpreisen

$$p_X = 24 \ \ [GE/ME_X] \text{ und } p_Y = 16[GE/ME_Y]$$

absetzen. Das Ziel des Unternehmens besteht darin, einen Umsatz von 192 $[GE]$ mit minimalen Kosten zu erzielen.

Ermitteln Sie mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatorenmethode

(i) die optimale (d.h. kostenminimale) Ausbringungsmengenkombination (x_{opt}, y_{opt})

(ii) die zugehörigen Minimalkosten $K_{min} = K(x_{opt}, y_{opt})$

(iii) den optimalen Wert λ_{opt} des Lagrangeschen Multiplikators.
Welche Interpretation hat λ_{opt}?

Lösungsansatz

Zielfunktion:

Nebenbedingung:

Nichtnegativitätsbedingungen:

Lagrange-Funktion und Ableitungen:

$$\mathbb{L}(x,y,\lambda) \quad =$$

$$\mathbb{L}_x \quad =$$

$$\mathbb{L}_y \quad =$$

$$\mathbb{L}_\lambda \quad =$$

Rechnungen:

Lösung:

Optimale Ausbringungsmengen

$x_{opt} =$

$y_{opt} =$

Minimalkosten("ln" kann stehenbleiben!)

$K_{\min} =$

Optimaler Wert des Lagrange-Multiplikators

$\lambda_{opt} =$

Interpretation von λ_{opt}:
Erhöht man das Umsatzziel um eine marginale Einheit, werden die Minimalkosten um ca. 0.00465 mrginale Einheiten steigen.

AUFGABE 5 :

Wählen Sie:
(Von dieser Aufgabe braucht nur <u>einer</u> der vier Teile $\boxed{\text{A}}$, $\boxed{\text{B}}$, $\boxed{\text{C}}$ und $\boxed{\text{D}}$ bearbeitet zu werden!)

$\boxed{\text{Wahlaufgabe A}}$

Ein Gut X wird auf dem Markt gemäß der Nachfragefunktion

$$p_N(x) = (49 - x^2)/4 \qquad [GE/ME_X]$$

nachgefragt. Das Angebot dagegen wird durch die Angebotsfunktion

$$p_A(x) = 1,75 + \frac{3}{4}x \qquad [GE/ME_X]$$

beschrieben.
(In beiden Fällen bezeichnet x die jeweilige Menge des Gutes X (in $[GE/ME_X]$).

Ergänzen Sie:

- Die Nachfrage erlischt bei einem Preis von .... $\boxed{}$
- Das Angebot erlischt bei einem Preis von .... $\boxed{}$
- Die größtmögliche Nachfrage beträgt .... $\boxed{}$

- Der Marktpreis p_{Markt} beträgt .... $\boxed{}$

- Im Marktgleichgewicht stimmen Angebot und Nachfrage überein und betragen $\boxed{}$

- Die Produzentenrente beträgt .... $\boxed{}$

Wahlaufgabe B

Es seien $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbare Funktionen und Z durch

$$Z(x, y) := f(g(x), h(y)), (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

definiert.

(i) Berechnen Sie mit Hilfe der Kettenregel allgemein

$Z_x =$

$Z_y =$

(ii) Wie lauten diese Ableitungen im Fall

$$\begin{aligned} f(g, h) &= \sqrt{1 + g^2 + h^2} \\ g(x) &= \sin^2 x \\ h(y) &= \frac{1}{1 + y^2}? \end{aligned}$$

Anwort:

$Z_x =$

$Z_y =$

Nebenrechnungen:

Wahlaufgabe C

Durch die Gleichung $f(x,y) = xye^{x^2+y^2} - 2e^5 = 0$ wird im ersten Quadranten des $\mathbb{R}^2$ eine Kurve definiert, die den Punkt $(x_0, y_0) = (1; 2)$ enthält und implizit eine Funktion $x \mapsto k(x)$ definiert. Ermitteln Sie die Ableitung von k durch implizite Differentiation!

Lösungssatz

- Formel für allgemeines f und allgemeines (x_0, y_0):

  $k'(x_0) = \boxed{}$

- Formel für die spezielle Form von f:

  $k'(x_0) = \boxed{}$

- **Ergebnis:**

  $k'(1) = \boxed{}$

Nebenrechnungen:

Wahlaufgabe D

Für $x > 0, y > 0$ wird die Funktion K mit

$$K(x, y) = \frac{x^2 y^2}{x^2 + xy + y^2}$$

betrachtet.

(i) Bestimmen Sie den Homogenitätsgrad von K.

(ii) Berechnen Sie die partielle Elastizität $\varepsilon_{K,x}$ von K bezüglich x allgemein und an der Stelle $(x_0, y_0) = (2, 3)$

$$\varepsilon_{K,x}(x, y) \quad =$$

$$\varepsilon_{K,x}(2; 3) \quad =$$

(iii) Interpretieren Sie den zuletzt gefundenen Wert.

Antwort:

....

....

....