DEFINITHEIT

Definition 1. *Eine symmetrische* $(n,n)-$*Matrix* M *heißt*

$$\left\{\begin{array}{ll} \text{positiv definit} & (\textit{symbolisch: } M \succ 0) \\ \text{positiv semidefinit} & (\textit{symbolisch: } M \succcurlyeq 0) \\ \text{negativ semidefinit} & (\textit{symbolisch: } M \preccurlyeq 0) \\ \text{negativ definit} & (\textit{symbolisch: } M \prec 0) \end{array}\right\},$$

wenn sämtliche ihrer Eigenwerte

$$\left\{\begin{array}{l} \textit{positiv} \\ \textit{nichtnegativ} \\ \textit{nichtpositiv} \\ \textit{negativ} \end{array}\right\} \quad \textit{sind.}$$

Die Matrix M *heißt* indefinit *(symbolisch:* $M \asymp 0$*), wenn sie gleichzeitig mindestens einen positiven und mindestens einen negativen Eigenwert besitzt.*

Bemerkung 1. Unter Benutzung des Spektrums $\sigma(M)$ kann man diese Eigenschaften auch so ausdrücken:

$$\begin{array}{lll} M \succ 0 & \Leftrightarrow & \sigma(M) \subset (\,0,\infty\,) \\ M \succcurlyeq 0 & \Leftrightarrow & \sigma(M) \subset [\,0,\infty\,) \\ M \preccurlyeq 0 & \Leftrightarrow & \sigma(M) \subset (\,-\infty,0\,] \\ M \prec 0 & \Leftrightarrow & \sigma(M) \subset (\,-\infty,0\,) \\ M \asymp 0 & \Leftrightarrow & \sigma(M) \cap (\,-\infty,0\,) \neq \emptyset \ \wedge \ \sigma(M) \cap (\,0,\infty\,) \neq \emptyset\,. \end{array}$$

Bemerkung 2. Es ist offensichtlich, daß jede symmetrische Matrix M entweder (positiv oder negativ) semidefinit oder indefinit ist, denn ihre Eigenwerte sind sämtlich reell. ("Indefinit" können nur mindestens 2-reihige Matrizen sein.)

Bemerkung 3. Positive und negative Semidefinitheit schließen sich nicht gegenseitig aus, sind allerdings (für jedes $n \in I\!N$) genau in einem Fall möglich:

$$\begin{array}{rll} M \succcurlyeq 0 \ \wedge \ M \preccurlyeq 0 & \Leftrightarrow & \sigma(M) \subset [\,0,\infty\,) \ \wedge \ \sigma(M) \subset (\,-\infty,0\,] \\ & \Leftrightarrow & \sigma(M) = \{\,0\,\} \\ & \Leftrightarrow & M = 0 \qquad (\nearrow \text{ Satz... }) \end{array}$$

Beispiel 1.

$n = 1, M = 5;\ \sigma(M) = \{\,5\,\} \quad \Rightarrow \quad M \succ 0$ positiv definit

Beobachtung: Im Fall reeller Zahlen stimmen die Relationen "$\succ$" und "$>$", "$\succcurlyeq$" und "$\geqslant$" etc. überein. △

Beispiel 2.

$$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix};\ \sigma(M) = \{\,2, 8\,\} \quad \begin{aligned} &\Rightarrow \quad M \succ 0 \quad \text{(positiv definit)} \\ &\Rightarrow \quad M \succcurlyeq 0 \quad \text{(positiv semidefinit)} \end{aligned}$$

Anmerkung: Es gilt stets $\begin{aligned} M \succ 0 \quad &\Rightarrow \quad M \succcurlyeq 0 \quad \text{und} \\ M \prec 0 \quad &\Rightarrow \quad M \preccurlyeq 0. \end{aligned}$

△

Beispiel 3.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix};\ \sigma(M) = \{\,-1, 3\,\} \quad \Rightarrow \quad M \asymp 0 \text{ (indefinit)}$$

Beobachtung: Obwohl $M \geqslant 0$ (komponentenweise) gilt, folgt hier **nicht** $M \succcurlyeq 0$. D.h., im Fall $n > 1$ besitzen die Relationen "$\geqslant$" und "$\succcurlyeq$" unterschiedliche Bedeutungen. (Sinngemäßes gilt für "$>$" und "$\succ 0$", "$\leqslant$" und "$\preccurlyeq$" etc.) △

Beispiel 4.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

Mit Hilfe der Sarrus'schen Regel findet man $P(\lambda) = -\lambda^3 + 16\lambda^2 - 10\lambda = -\lambda(\lambda^2 - 16\lambda + 10)$ und daher $\sigma(M) = \{\,0, 4 - \sqrt{6}, 4 + \sqrt{6}\,\} \geqslant 0$, d.h., M ist positiv semidefinit: $M \succcurlyeq 0$.
Da 0 ein Eigenwert von M, jedoch nicht positiv ist, ist M *nicht* positiv definit: $M \not\succ 0$.

Beobachtung: Hier liegt eine weitere Besonderheit der Dimensionen $n > 1$. Im Fall $n = 1$ nämlich hätte man aus $M \succcurlyeq 0$ und $M \not\succ 0$ folgern können $M = 0$, was hier offenbar nicht zutrifft. △

Beispiel 5.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Hier gilt $\sigma(M) = \{\,-1, 2, 4\,\}$, und M ist indefinit: $M \asymp 0$.

(Zur Berechnung: Mit Hilfe z.B. des Austauschverfahrens (AVZS) findet man $\det(M - \lambda I)$:

$T0$				$T1$		
$1-\lambda$	1	1	2	1	$1 + (1-\lambda)(\lambda-2)$	2
1	$2-\lambda$	0	0	$\boxed{2-\lambda}$	$\lambda - 2$	0
$\boxed{1}$	0	$2-\lambda$	0			
2	0	0	$2-\lambda$	0	$2(\lambda-2)$	$(2-\lambda)$
$*$	0	$2-\lambda$	0	$*$	1	0
$\ominus$				$\ominus$		

$T2$		$T3$
$2+(1-\lambda)(\lambda-2)$	2	$6+(1-\lambda)(\lambda-2)$
$2(\lambda-2)$	$\boxed{(2-\lambda)}$	
2	$*$	$*$
	$\oplus$	$\oplus$

Es gilt

$$P(\lambda) = (\lambda-2)^2[\,(\lambda-1)(\lambda-2)-6\,] = (\lambda-2)^2[\,\lambda^2-3\lambda-4\,]$$

mit den leicht erkennbaren Nullstellen

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 = -1, \quad \lambda_4 = 4.)$$

△

Beispiel 6.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Es gilt $\sigma(M) = \{\,1, 6\,\}$ und daher $M \succ 0$ sowie $M \succcurlyeq 0$.

(Zur Berechnung: Mit Hilfe des Austauschverfahrens findet man die Faktoren von $P(\lambda)$:

$T0$					$T1$				$T2$		
$2-\lambda$	1	1	1	1	$\lambda-1$	$\lambda-1$	$\lambda-1$	$1-(\lambda-2)^2$	$\lambda-1$	$\lambda-1$	$\lambda-(\lambda-2)^2$
1	$2-\lambda$	1	1	1	$1-\lambda$	0	0	$\lambda-1$	$1-\lambda$	0	$\lambda-1$
1	1	$2-\lambda$	1	1	0	$1-\lambda$	0	$\lambda-1$	0	$\boxed{1-\lambda}$	$\lambda-1$
1	1	1	$2-\lambda$	1	0	0	$\boxed{1-\lambda}$	$\lambda-1$			
$\boxed{1}$	1	1	1	$2-\lambda$							
$*$	-1	-1	-1	$\lambda-2$	0	0	$*$	1		$*$	1
$\oplus$							$\ominus$			$\ominus$	

$T3$		$T4$
$\lambda-1$	$2\lambda-1-(\lambda-2)^2$	$3\lambda-2-(\lambda-2)^2$
$\boxed{1-\lambda}$	$\lambda-1$	
$*$	1	$*$
$\ominus$		$\oplus$

d.h.

$$\begin{aligned} P(\lambda) &= (+1)\cdot 1\cdot(-1)(1-\lambda)\cdot(-1)(1-\lambda)\cdot(-1)(1-\lambda)\cdot(+1)\left[3\lambda-2-(\lambda-2)^2\right] \\ &= (\lambda-1)^3\left[-\lambda^2+7\lambda-6\right] \end{aligned}$$

mit den Nullstellen $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1,\ \lambda_{4,5} = \frac{7}{2} \pm \sqrt{\frac{25}{4}}$.)

△

Untersuchung auf Definitheit: Vereinfachungen

Es entsteht die Frage, ob die Untersuchung einer symmetrischen Matrix auf Definitheit nicht auf eine weniger aufwendige Art möglich ist als auf dem Wege der Ermittlung ihrer Eigenwerte. Die Antwort lautet JA - in gewissen Fällen:

DER FALL $n = 1$

Offensichtlich gilt hier

$$M \succ 0 \;\Leftrightarrow\; M > 0, \qquad M \succcurlyeq 0 \;\Leftrightarrow\; M \geqslant 0 \text{ usw.}$$

DER FALL $n = 2$

Zur Erarbeitung einer Vermutung betrachten wir den Fall einer 2-reihigen (symmetrischen) Matrix:

$$M = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix},$$

Rechnung ergibt

$$P(\lambda) = \det(M - \lambda I) = \lambda^2 - (a + c)\lambda + ac - b^2 = \lambda^2 - (\operatorname{tr} M)\lambda + \det M \tag{1}$$

wobei wir mit $\operatorname{tr} M := a + c$ die Summe der Diagonalelemente bezeichnen (die sogenannte "Spur" von M). Andererseits zerfällt $P(\lambda)$ vollständig in Linearfaktoren, die die Eigenwerte enthalten:

$$P(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = \lambda^2 - (\lambda_1 + \lambda_2)\lambda + \lambda_1\lambda_2\,. \tag{2}$$

Koeffizientenvergleich von (1) und (2) ergibt

$$\lambda_1 + \lambda_2 \;=\; \operatorname{tr} M \tag{3}$$

$$\lambda_1\lambda_2 \;=\; \det M \tag{4}$$

Aus (4) kann man sofort erkennen:

(i)	$M \succ 0$ oder $M \prec 0$	("definit")	$\Leftrightarrow$	$\det M > 0$
(ii)	$M \asymp 0$	("indefinit")	$\Leftrightarrow$	$\det M < 0$
(iii)	$(M \succcurlyeq 0 \,\wedge\, M \not\succ 0)$ oder $(M \preccurlyeq 0 \,\wedge\, M \not\prec 0)$		$\Leftrightarrow$	$\det M = 0$

In praktischen Fragen interessiert oft nur der Fall (i) der "Definitheit", der schon an $\det M = ac - b^2 > 0$ erkannt wird. In diesem Fall gilt $ac > b^2 \geqslant 0$, d.h. a und b müssen dasselbe Vorzeichen haben und beide von 0 verschieden sein.

Eine weitere Untergliederung des Falles (i) "definit" in *positiv* vs. *negativ* definit zeigt wegen (1) folgendes:

$$\begin{aligned} M \succ 0 \;&=\; \lambda_1 + \lambda_2 > 0 \;\Longleftrightarrow\; a + c > 0 \\ &\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}\; a > 0 \qquad (\,\wedge\, c > 0\,) \\[1ex] M \prec 0 \;&=\; \lambda_1 + \lambda_2 < 0 \;\Longleftrightarrow\; a + c < 0 \\ &\overset{(*)}{\Longleftrightarrow}\; a < 0 \qquad (\,\wedge\, c < 0\,)\,, \end{aligned}$$

wobei die Äquivalenz $(*)$ darauf beruht, daß im vorausgesetzten Fall der Definitheit a und c beide positiv oder beide negativ sein müssen.

Wir gelangen zu folgender Klassifikation:

$$\begin{array}{rlcl} a > 0\,, & \det M > 0 & \Longleftrightarrow & M \succ 0 \\ a < 0\,, & \det M > 0 & \Longleftrightarrow & M \prec 0 \\ & \det M < 0 & \Longleftrightarrow & M \asymp 0 \end{array}$$

Liest man "a" als det a (Determinante der nur aus a bestehenden Matrix), so wird diese Klassifikation vollständig durch (Unter-) Determinanten von M ausgedrückt.

DER ALLGEMEINE FALL

Ein Vergleich der Fälle $n = 1$ und $n = 2$ führt zu der Vermutung, daß die Hauptabschnittsdeterminanten aufsteigender Ordnung zur Beurteilung der Definitheit herangezogen werden sollten.

Es sei M eine beliebige $(n, n)-$Matrix und $I = \{ 1, \ldots, n \}$.
Wir bezeichnen für beliebige Indexmengen

$$Z = \{ z_1, \ldots, z_r \} \subset I \qquad \text{und} \qquad S = \{ s_1, \ldots, s_l \} \subset I \qquad (r, l < n)$$

mit

$$M^{\setminus Z \setminus S} := M^{\setminus z_1, \ldots, z_r \setminus s_1, \ldots, s_l}$$

die Submatrix, die durch Streichung der Zeilen $z_1, \ldots, z_r$ und der Spalten $s_1, \ldots, s_l$ aus der Matrix M hervorgeht.

Beispiel 7.

1. $M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad M^{\setminus 1,3 \setminus 2} = (0, 1)$

2. $M = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 3 & 2 \\ 0 & 7 & 5 & 1 \\ 3 & 8 & 6 & 9 \\ -2 & -5 & 3 & 2 \end{pmatrix} \qquad M^{\setminus 3,4 \setminus 1,4} = \begin{pmatrix} -1 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}$

Stimmen alle zu streichenden Zeilen- und Spaltenindizes überein, d.h. gilt $Z = S$, schreiben wir kurz $M^{\setminus Z}$ statt $M^{\setminus Z \setminus Z}$; beispielsweise

Beispiel 8 (Fortsetzung von Beispiel 7).

1. $$M^{\setminus 3} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2. $$M^{\setminus 3,4} = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 0 & 7 \end{pmatrix}$$

$\triangle$

Definition 2. *Es seien $n \in I\!N$, $I = \{ 1, \ldots, n \}$ und M eine $(n, n)-$Matrix. Jede Matrix der Form $M^{\setminus Z}$ mit $Z = \{ z_1, \ldots, z_r \} \subset I$, $r < n$, heißt* ($n - r-$reihige) Hauptabschnittsuntermatrix von M, *ihre Determinante* $\det \left(M^{\setminus Z} \right)$ *heißt* Hauptabschnittsunterdeterminante *oder* Hauptminor von M.

Spezialfall "Aufsteigende Hauptminoren"

Für

$$M = \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n1} & \cdots & m_{nn} \end{pmatrix}$$

sind die folgenden Hauptminoren von besonderer Bedeutung:

$$\begin{aligned}
H_1(M) &:= m_{11} \quad (= \det(m_{11})) \\
H_2(M) &:= \det \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix} = \det\, M^{\backslash 3,\ldots,n} \\
&\vdots \\
H_k(M) &:= \det \begin{pmatrix} m_{11} & \cdots & m_{1k} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{k1} & \cdots & m_{kk} \end{pmatrix} = \mathit{det}\, M^{\backslash k+1,\ldots,n} \\
&\vdots \\
H_n(M) &:= \det M = \det\, M^{\backslash\emptyset}
\end{aligned}$$

Da diese Hauptminoren im Weiteren bei der Untersuchung sogenannter Hesse-Matrizen eine große Rolle spielen, werden wir sie auch als Hesse-Determinanten bezeichnen.

Satz 1 (Kennzeichnung der (In-)Definitheit). *Es sei $n \in I\!N$ und M eine symmetrische $(n,n)-$Matrix. Dann gilt:*

(i) Die Matrix M ist genau dann positiv definit, wenn sämtliche ihrer Hesse-Determinanten positiv sind:

$H_1(M) > 0, \ldots, H_n(M) > 0.$

(ii) Die Matrix M ist genau dann negativ definit, wenn sämtliche ihrer Hesse-Determinanten von Null verschieden sind und - mit $H_1(M) < 0$ beginnend - alternierende Vorzeichen besitzen:

$$H_1(M) < 0,\ H_2(M) > 0,\ H_3(M) < 0, \ldots,\ H_n(M) \begin{cases} > 0 & n \text{ gerade} \\ < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(iii) Wenn $\det M \neq 0$ *gilt und keiner der beiden Fälle (i) oder (ii) vorliegt, ist M indefinit.*

Beispiel 9.

$n = 1$, $M = 5$; hier gilt $H_1(M) = H_n(M) > 0$, also gilt $M \succ 0$. △

Beispiel 10.

$M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$.

Es gilt:	$H_1 = 5$	$H_2 = 16$
Vorzeichen:	$\oplus$	$\oplus$

Aus Satz 1 (i) folgt: $M \succ 0$. △

Beispiel 11.

$K = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}$.

Es gilt:	$H_1 = -5$	$H_2 = 16$
Vorzeichen:	$\ominus$	$\oplus$

Aus Satz 1 (ii) folgt: $K \prec 0$. △

Beispiel 12.

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Es gilt:	$H_1 = 1$	$H_2 = -3$
Vorzeichen:	$\oplus$	$\ominus$

Hier ist $\det C = H_2(C) \neq 0$, jedoch liegt weder die Situation von Satz 1 (i) (Vorzeichenfolge $\oplus\oplus$) noch die von Satz 1 (ii) (Vorzeichenfolge $\ominus\oplus$) vor. Nach Teil (iii) von Satz 1 ist C indefinit: $C \asymp 0$. △

Beispiel 13.

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}. \qquad \begin{array}{lll} \text{Es gilt:} & H_1 = 1 & H_2 = 0 \\ \text{Vorzeichen:} & \oplus & \text{⓪} \end{array}$$

Es liegt keine der in Satz 1 beschriebenen Situationen vor, damit läßt sich mittels Satz 1 lediglich aussagen: $D \nsucc 0,\ D \nprec 0$.

Unter Ausnutzung der *speziellen Dimension* ($n = 2$) kann noch weiter geschlossen werden: Wäre D indefinit, also je ein Eigenwert positiv und negativ, müßte $H_2 \neq 0$ gelten. (Dieser Schluß ist für $n \geqslant 3$ nicht mehr richtig.) Da jedoch $H_2 = 0$ gilt, ist D *nicht* indefinit.

Es bleiben die beiden Möglichkeiten $D \succcurlyeq 0$ und $D \preccurlyeq 0$, die anhand von Satz 1 nicht unterschieden werden können.
Um auf die Eigenwertberechnung verzichten zu können, wird der folgende Satz 2 derartigen Situationen gewidmet. △

Beispiel 14.

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Die Berechnung der Hesse-Determinanten erfolgt wegen der "Größe" von M zweckmäßig mit dem Austauschverfahren.

$T0$					$T1$				$T2$			$T3$		$T4$
$\boxed{2}$	1	1	1	1										
1	2	1	1	1	$\boxed{\frac{3}{2}}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$						
1	1	2	1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\boxed{\frac{4}{3}}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$			
1	1	1	2	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\boxed{\frac{5}{4}}$	$\frac{1}{4}$	
1	1	1	1	2	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{4}{3}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{5}{4}$	$\boxed{\frac{6}{5}}$
*	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	*	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	*	$-\frac{1}{4}$	$-\frac{1}{4}$	*	$-\frac{1}{5}$	*
$\oplus$					$\oplus$				$\oplus$			$\oplus$		$\oplus$

(Da "entlang der Hauptdiagonale" pivotisiert wurde, entstehen keine Vorzeichenkorrekturen.)

Es folgt

$H_1 = 2$

$H_2 = 2 \cdot \frac{3}{2} = 3$

$H_3 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 4$

$H_4 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} = 5$

$H_5 = 2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{6}{5} = 6$

mit der Vorzeichenfolge $\oplus\oplus\oplus\oplus\oplus$, d.h. $M \succ 0$.

Diese Matrix war bereits im vorigen Punkt betrachtet worden, dabei wurde $\sigma(M) = \{1, 6\}$ ermittelt, wobei sich sehr erleichternd auswirkte, daß $P(\lambda)$ von besonders einfacher Gestalt war. △

Beispiel 15.

Viel einfacher sieht die folgende Matrix aus:

$$B = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Wir arbeiten die Hesse-Determinanten ab:

$T0$			$T1$		$T2$
$\boxed{3}$	1	1			
1	5	1	$\boxed{\frac{14}{3}}$	$\frac{2}{3}$	
1	1	7	$\frac{2}{3}$	$\frac{20}{3}$	$\boxed{\frac{46}{7}}$
$*$	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	$*$	$-\frac{1}{7}$	$*$
$\oplus$			$\oplus$		$\oplus$

und finden

$H_1 = 3, \quad H_2 = 3 \cdot \frac{14}{3} = 14, \quad H_3 = 3 \cdot \frac{14}{3} \cdot \frac{46}{7} = 92$

(Vorzeichenfolge $\oplus \oplus \oplus$). Mithin gilt $\quad B \succ 0$.

Ein Versuch, dasselbe Ergebnis über die Ermittlung der Eigenwerte zu erhalten, führt auf den Ansatz

$$P(\lambda) = -\lambda^3 + 15\lambda^2 - 68\lambda + 92 = 0\,.$$

Die Lösung dieser Gleichung ist auf exaktem Wege möglich, aber sehr schwierig. Auch einfache Abschätzungen der Lösungsmenge sind aufwendiger als die hier vorgestellte "Hesse-Determinanten-Methode". △

Die Klärung der Frage, ob eine nicht definite Matrix immerhin semidefinit ist, kann mit Hilfe des folgenden Satzes 2 erfolgen.

Satz 2. *Es sei $n \in I\!N$ und M eine symmetrische $(n,n)-$Matrix. Genau dann ist M positiv semidefinit, wenn sämtliche Hauptminoren von M nichtnegativ sind.*

Bemerkung 4.

1. In die Untersuchung auf Semidefinitheit sind also auch diejenigen Hauptminoren einzubeziehen, die nicht unter den Hesse-Determinanten vorkommen.
2. Wegen $\quad M \succcurlyeq 0 \;\Leftrightarrow\; -M \preccurlyeq 0 \quad$ erlaubt Satz 2 auch eine Untersuchung auf *negative* Semidefinitheit. (↗ Beispiele 18 ff)

Beispiel 16 (Fortsetzung von Beispiel 13).

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$$

Hauptminoren 1. Ordnung sind $\quad \det D^{\setminus 2} = H_1 = 1 \quad$ und $\quad \det D^{\setminus 1} = 4\,,$
einziger Hauptminor 2. Ordnung $\quad \det D^{\setminus 0} = H_2 = 0\,.$

Alle drei Werte sind nichtnegativ, also gilt $D \succcurlyeq 0$.

Anmerkung: Satz 2 gibt keine Auskunft darüber, ob eventuell sogar $D \succ 0$ gelten könnte. Mit Hilfe von Satz 1 jedoch wurde dieser Fall bereits ausgeschlossen.

Das Ergebnis der Anwendung beider Sätze lautet also: $D \succcurlyeq 0 \;\wedge\; D \not\succ 0$. △

Beispiel 17 (Fortsetzung von Beispiel 4).

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}.$$

Übersicht über alle Hauptminoren

$$\underbrace{\begin{array}{lcl} H_1(M) = |\,M^{\setminus 2,3}\,| = 1 \\ H_2(M) = |\,M^{\setminus 3}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{vmatrix} = 0 \\ H_3(M) = |\,M^{\setminus 0}\,| = |\,M\,| = 0 \end{array}}_{\text{“Hesse-Determinanten”}} \quad \underbrace{\begin{array}{ll} |\,M^{\setminus 1,3}\,| = 4 & |\,M^{\setminus 1,2}\,| = 11 \\ |\,M^{\setminus 2}\,| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 11 \end{vmatrix} = 2 & |\,M^{\setminus 1}\,| = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 6 & 11 \end{vmatrix} = 8 \\ & \end{array}}_{\text{“übrige Hauptminoren”}}$$

Da sämtliche Hauptminoren $\geqslant 0$ sind, liefert Satz 2: $M \succcurlyeq 0$
Gleichzeitig ist z.B. $H_3 = 0$, woraus nach Satz 1 folgt: $M \not\succ 0$. △

Beispiel 18.

$A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. Wir haben

$$\underbrace{\begin{array}{lcl} H_1(A) = |\,A^{\setminus 2}\,| = 0\,, \\ H_2(A) = |\,A\,| = 0\,, \end{array}}_{\text{Hesse-Determinanten } \geqslant 0\,!} \quad \underbrace{\begin{array}{l} \text{jedoch} \quad |\,A^{\setminus 1}\,| = -1 < 0 \\ \end{array}}_{\text{übrige } \ngeqslant 0\,!}$$

In diesem Fall kann aus Satz 2 geschlossen werden $A \not\succcurlyeq 0$, (und erst recht $A \not\succ 0$), während Satz 1 ergänzend liefert $A \not\prec 0$. Von den theoretisch zwei verbleibenden Möglichkeiten $A \preccurlyeq 0 \wedge A \not\prec 0$ oder $A \asymp 0$ bleibt (wegen der speziellen Dimension $n = 2$) nur die erste.

Dieses einfache Beispiel lehrt, daß jedoch folgender “Satz” *falsch* ist:

$$\text{“ } A \succcurlyeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad H_1 \geqslant 0,\; H_2 \geqslant 0, \ldots, H_n \geqslant 0 \text{ .”}$$

△

Aus dem letzten Beispiel wird leider noch nicht klar, daß auch folgende Aussage nicht allgemeingültig ist:

$$\text{“ } A \preccurlyeq 0 \quad \Leftrightarrow \quad \text{alle Hauptminoren sind nichtpositiv } (\leqslant 0) \text{ ”}$$

Die folgenden zwei Beispiele werden dies klar zeigen.

Beispiel 19.

Es sei $X = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$ und $Y := -X = \begin{pmatrix} 4 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$.
Für die Matrix Y finden wir

$$\begin{array}{lclcl} H_1(Y) & = & |\,Y^{\setminus 2}\,| & = & 4 \quad \text{und} \quad |\,Y^{\setminus 1}\,| = 3 \\ H_2(Y) & = & |\,Y\,| & = & 8; \end{array}$$

nach Satz 2 ist Y positiv semidefinit. Also ist X negativ semidefinit.

Die Hauptminoren von X sind jedoch

$$\begin{array}{lclcl} H_1(X) & = & |\,X^{\setminus 2}\,| & = & -4 \quad \text{und} \quad |\,X^{\setminus 1}\,| = -3 \\ H_2(X) & = & |\,X\,| & = & 8\,, \end{array}$$

d.h.

$$X \preccurlyeq 0 \quad \not\Rightarrow \quad \text{alle Hauptminoren sind } \leqslant 0\,. \qquad \triangle$$

Beispiel 20.

Es sei $Z := \begin{pmatrix} -1 & 5 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, dann gilt

$$\begin{array}{lclcl} H_1(Z) & = & |\,Z^{\setminus 2}\,| & = & -1 \quad \text{und} \quad |\,Z^{\setminus 1}\,| = -3 \quad \text{sowie} \\ H_2(Z) & = & |\,Z\,| & = & -22\,. \end{array}$$

D.h., sämtliche Hauptminoren sind negativ, jedoch ist Z indefinit (nach Satz 1 (iii)). Wir finden

$$Z \preccurlyeq 0 \quad \not\Leftarrow \quad \text{alle Hauptminoren sind } \leqslant 0\,. \qquad \triangle$$

Aus Satz 2 ergibt sich noch folgender nützliche

Satz 3. *Es sei $n \in \mathbb{N}$ und M eine symmetrische $(n,n)-$Matrix.*

(i) Gilt $\left\{ \begin{array}{c} M \succcurlyeq 0 \\ M \preccurlyeq 0 \end{array} \right\}$, *so sind sämtliche Hauptdiagonalelemente* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{nichtnegativ} \\ \textit{nichtpositiv} \end{array} \right\}$.

(ii) Enthält die Hauptdiagonale von M Elemente mit gegensätzlichen Vorzeichen, so ist M indefinit.

Beispiel 21.

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Da die Hauptdiagonalelemente wechselnde Vorzeichen haben, kann weder $M \succcurlyeq 0$ noch $M \preccurlyeq 0$ gelten; es bleibt nur $M \asymp 0$.

Anmerkung: In solchen Fällen kann Indefinitheit besonders schnell erkannt werden. Es gibt jedoch auch andere Fälle, siehe folgendes Beispiel. $\triangle$

Beispiel 22.

$G = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ ist indefinit (denn $\det G = -7$);

d.h. wechselnde Vorzeichen in der Hauptdiagonalen sind hinlänglich für Indefinitheit, aber nicht notwendig. $\triangle$

Die sich aus sinnvoller Anwendung der Sätze 1 - 3 ergebende Methodik für Definitheitsuntersuchungen wird durch nachfolgende Übersicht veranschaulicht.