

Universität Paderborn

SS2005

Warburgerstr.100

33098 Paderborn

Proseminarbeit

Die Regel von de l'Hospital

Margarethe Pilichowski

11. April 2005

1 Die Regel von de l'Hospital

1.1 Verallgemeinerter Mittelwertsatz

Satz: Es seien $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbf{R}$ stetige Funktionen, die auf (a, b) differenzierbar sind, wobei $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a, b)$.

Dann ist $g(a) \neq g(b)$ und es existiert ein $c \in (a, b)$ mit

$$\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}.$$

Beweis: Als erstes ist zu zeigen, dass $g(a) \neq g(b)$ ist.

Nach dem 1.MWS existiert ein ξ aus (a, b) mit $\frac{g(b)-g(a)}{b-a} = g'(\xi)$. Daraus folgt:

$g(b) - g(a) = (b - a)g'(\xi) \neq 0$. Damit ist gezeigt, dass $g(a) \neq g(b)$ ist.

Als zweites wollen wir zeigen, dass ein c aus (a, b) existiert mit $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$.

Dazu definieren wir eine Hilfsfunktion $F(x) := f(x) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(x) - g(a))$.

Im Fall $x = b$ ergibt sich: $F(b) = f(b) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot (g(b) - g(a)) = f(a)$.

Für $x = a$ ist $F(a) = f(a) - \frac{f(b)-f(a)}{g(a)-g(a)} \cdot 0 = f(a)$.

Demzufolge ist $F(a) = F(b)$. Es existiert also ein c aus (a, b) mit $F'(c) = 0$. Dies liefert

$f'(c) - \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} \cdot g'(c) = 0$, was äquivalent ist zu

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(c)}{g'(c)} \quad (\text{Beh.}).$$

1.2 Die Regel von de l'Hospital

Satz: f, g seien differenzierbar auf (a, b) mit $a, b \in \mathbf{R}$ und $g'(x)$ sei immer $\neq 0$.

Außerdem gelte entweder

$$(A1) \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = 0 \quad \text{oder}$$

$$(A2) \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \pm\infty.$$

Dann ist: $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f'(x)}{g'(x)}$, falls der rechte Limes existiert.

Entsprechend gilt die Behauptung für $x \rightarrow b-$.

Beweis: (a) Sei $\eta := \lim_{x \rightarrow a+} \frac{f'(x)}{g'(x)} \in [-\infty, +\infty)$.

Wähle zu beliebig vorgegebenem $y_0 > \eta$ ein y_1 mit $\eta < y_1 < y_0$ und bestimme zu y_1 ein x_1 aus (a, b) , so dass $\frac{f'(x)}{g'(x)} < y_1$ für alle x mit $a < x < x_1$ gilt. **(I)**

Da f, g differenzierbar in (a, x_1) , folgt, dass f, g stetig sind auf (a, x_1) ; außerdem ist nach Voraussetzung $g'(x)$ immer ungleich Null. Damit können wir für ein Intervall $[x, u] \subseteq (a, x_1)$ den *verallgemeinerten (zweiten) MWS* anwenden: Zu $x, u \in (a, x_1)$ mit $x < u$ findet man also eine Stelle μ - mit $x < \mu < u$ -, für die gilt:

$$\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} = \frac{f'(\mu)}{g'(\mu)}.$$

Da $\mu < u < x_1$ (vgl.(I)) $\Rightarrow \frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} < y_1 < y_0$ für alle $x, u \in (a, x_1)$ mit $x < u$. **(II)**

Gilt nun (A1), dann folgt für $x \rightarrow a+$:

$$\lim_{x \rightarrow a+} \frac{f(x) - f(u)}{g(x) - g(u)} = \frac{0 - f(u)}{0 - g(u)} = \frac{f(u)}{g(u)} \leq y_1 < y_0. \text{ **(III)}**$$

Gilt $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = \pm\infty$ (A2), dann bestimme zu einem festen $u \in (a, x_1)$ ein $x_2 \in (a, u)$, so dass die Abschätzung $g(x) = \max(0, g(u))$ bzw. $g(x) = \min(0, g(u))$, je nachdem ob $\lim_{x \rightarrow a+} g(x) = +\infty$ oder $-\infty$, erfüllt ist.

Daraus folgt, dass $\frac{g(x)-g(u)}{g(x)}$ immer größer 0 ist in (a, x_1) (denn im ersten Fall sind Zähler und Nenner positiv, im zweiten Fall sind Zähler und Nenner negativ).

Mit **(II)** folgt dann: $\frac{f(x)-f(u)}{g(x)-g(u)} \cdot \frac{g(x)-g(u)}{g(x)} < y_1 \frac{g(x)-g(u)}{g(x)}$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)-f(u)}{g(x)} < y_1 \frac{g(x)-g(u)}{g(x)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{f(x)}{g(x)} < y_1 \cdot 1 - y_1 \frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)} \text{ für alle } x \text{ mit } a < x < x_2.$$

Für $x \rightarrow a+$ ist dann: $\lim_{x \rightarrow a+} y_1 \cdot 1 - y_1 \frac{g(u)}{g(x)} + \frac{f(u)}{g(x)} = y_1$ und da $y_1 < y_0$ existiert also $x_3 \in (a, x_2)$, so dass

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (a, x_0). \text{ **(IV)}**$$

Insgesamt folgt also, dass unter jeder der Annahmen (A1) und (A2) zu jedem $y_0 > \eta$ ein

x_0 existiert, so dass gilt:

$$\frac{f(x)}{g(x)} < y_0 \quad \forall x \in (a, x_0).$$

Da y_0 beliebig nahe an η gewählt werden kann, folgt in jedem Fall:

$$\limsup_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \leq \eta$$

b) Im Falle $\lim_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} = \eta \in (-\infty, +\infty]$ findet man analog zu a) zu jedem $\bar{y}_0 < \eta$ ein \bar{x}_0 , so dass die Abschätzung $\bar{y}_0 < \frac{f(x)}{g(x)}$ gilt für alle x aus (a, \bar{x}_0) . Daraus folgt wie oben, dass in jedem Fall $\liminf_{x \rightarrow a^+} \frac{f(x)}{g(x)} \geq \eta$ ist.

Das heißt, der Limes existiert für $\eta \in \mathbf{R}$, sowie $\eta = \pm\infty$.

2 Anwendungen der Regel

Der folgende Abschnitt zeigt eine Reihe von Aufgaben, bei denen es nützlich ist die Regel von de l'Hospital anzuwenden, um die Grenzwerte der Funktionen zu bestimmen. Es zeigt sich außerdem, dass oft eine mehrfache Anwendung der Regel nötig ist, um den gesuchten Limes zu ermitteln:

Bsp.1 : $f(x) = e^x + e^{-x} - 2$, $g(x) = 1 - \cos x$. Betrachte den Limes für $x \rightarrow 0$ von $f(x)/g(x)$.

Die Regel von de l'Hospital lässt sich anwenden - es gilt (A1): $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 1 + 1 - 2 = 0$ und ebenso $\lim_{x \rightarrow 0} g(x) = 1 - 1 = 0$

Also betrachten wir den Grenzwert der Ableitungen $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x}$. Auf diesen Bruch lässt sich wiederum die Regel anwenden, Zähler sowie Nenner laufen gegen 0.

Es ist dann $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = \frac{1 + 1}{1} = 2$.

Der Grenzwert der Ableitungen existiert, somit ist $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x)}{g(x)} = 2$.

Bsp.2 : Gesucht ist der Grenzwert für $x \rightarrow 0$ von $\frac{\sqrt{1+x \sin x} - \cos x}{\sin^2 x}$. Wiederum konvergieren Zähler und Nenner gegen Null.

Der Grenzwert der Ableitungen ist:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{(1/2)(1 + x \sin x)^{-1/2}(\sin x + x \cos x) + \sin x}{\sin^2 x / 2 \cos^2 x / 2}$$

Wir haben einen Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$. Die Regel erneut angewandt ergibt:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{-(1/2)(1 + \sin x)^{-3/2}(\sin x + x \cos x)^2 + (1 + x \sin x)^{-1/2}(\cos x + x \sin x + \cos x) + 2 \cos x}{2[1/2 \cos(x/2) \cos(x/2) + \sin(x/2)1/2(-\sin(x/2))]}$$

$$= \frac{0 + 1(1 + 0 + 1) + 2}{2 \cdot 1/2 + 0} = 4$$

Damit ist der gesuchte Grenzwert 4.

Bsp.3 : Im Falle von $x \cdot \ln(1 + 1/x)$ für x gegen $+\infty$ formt man zunächst in einen Bruch um; wir betrachten $\frac{\ln(1+1/x)}{x^{-1}}$. Da sowohl Zähler als auch Nenner gegen Null konvergieren, wenn x gegen $+\infty$ läuft, folgt also bei Anwendung der Regel:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 + 1/x} \cdot (-1) \frac{1}{x^2} \cdot \frac{1}{(-1) \frac{1}{x^2}} = 1.$$

Also ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} x \cdot \ln 1 + 1/x = 1$.

Mit Hilfe der Regel sind auch einige allgemeine Aussagen bzgl. der Grenzwerte bestimmter Funktionen zu treffen:

- i) Für $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x}$, $\alpha > 0$ sind die Bedingungen für die Regel von de l'Hospital erfüllt. Es ist $\lim_{x \rightarrow +\infty} \alpha e^{\alpha x} = +\infty$; der Grenzwert der Ableitung existiert, somit ist der gesuchte Limes also $+\infty$.

Aus dieser Beobachtung kann man schließen, dass $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^{\alpha x}}{x^\beta} = +\infty$ für $\alpha, \beta > 0$, denn der Quotient lässt sich umformen zu $(\frac{e^{(\alpha/\beta)x}}{x})^\beta$. Mit der ersten Beobachtung folgt also sofort, dass der gesuchte Grenzwert $+\infty$ sein muss.

Diese bedeutet, dass egal wie klein man α wählt, $e^{\alpha x}$ deutlich schneller gegen $+\infty$ konvergiert, als jede noch so große Potenz von x .

Für jedes Polynom $p(x)$ und $\alpha > 0$ ist der Grenzwert für x gegen $+\infty$ von $p(x)e^{-\alpha x}$ gleich 0. Denn man kann umformen zu $\frac{p(x)}{e^{\alpha x}}$. Die Bedingungen für de l'Hospital sind erfüllt (der Zähler läuft hier gegen $+\infty$). Nach $n + 1$ -maligem Differenzieren steht im Zähler 0 - im Nenner ein Ausdruck der Form $\alpha^{n+1}e^{\alpha x}$. Der Grenzwert ist also 0.

Die Folgerung ergibt sich gleichfalls aus i), denn $e^{\alpha x}$ im Nenner läuft schneller gegen $+\infty$ als die Potenz von x in Form des Polynoms p .

- ii) Auch für $\ln x$ ergeben sich interessante Grenzwertaussagen:

Wendet man die Regel auf $\frac{\ln x}{x^\alpha}$ für x gegen $+\infty$ ($\alpha > 0$) an, ergibt sich als Grenz-

wert 0. Denn $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{a/x}{\alpha x^{\alpha-1}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x \alpha x^{\alpha-1}} = 0$

Daraus folgt $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{(\ln x)^\beta}{x^\alpha} = 0$ für $\alpha, \beta > 0$, denn wie oben lässt sich umformen zu $(\frac{\ln x}{x^{(\alpha/\beta)}})^\beta$.

Das heißt, x^α konvergiert auch mit sehr kleinem α schneller gegen $+\infty$ als eine noch so große Potenz von $\ln x$.

Es folgen zwei weitere Aufgaben, bei denen die Regel von de l'Hospital und daraus resultierende Grenzwertaussagen wichtig sind:

Bsp.I) Gesucht wird der Grenzwert für $n \rightarrow +\infty$ von $n^2[(1 - \frac{1}{n})^\alpha - (1 - \frac{\alpha}{n})]$.

Dazu setze man zunächst $x = 1/n$ und betrachte dementsprechend den Limes für $x \rightarrow 0$ (es gilt hierbei (A2)).

Die Ableitungen ergeben: $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(1-x)^{\alpha-1}(-1) + \alpha}{2x}$. Dies ist ein Ausdruck der Form $\frac{0}{0}$.

Die zweite Ableitung liefert:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\alpha-1)(1-x)^{\alpha-2}(-1)(-1)}{2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} (1-x)^{\alpha-2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2} = \binom{\alpha}{2}.$$

Also $n^2[(1 - \frac{1}{n})^\alpha - (1 - \frac{\alpha}{n})] \rightarrow \binom{\alpha}{2}$ für n gegen ∞ .

Definiere ein Folge b_n mit $b_n := n^2[(1 - \frac{1}{n})^\alpha - (1 - \frac{\alpha}{n})]$

$$\Rightarrow \frac{b_n}{n^2} = (1 - \frac{1}{n})^\alpha - (1 - \frac{\alpha}{n})$$

$$\Leftrightarrow \frac{b_n}{n^2} + 1 + \frac{\alpha}{n} = (1 - \frac{1}{n})^\alpha.$$

Da oben gezeigt wurde, dass b_n konvergiert, folgt, dass b_n beschränkt ist, also $|b_n| \leq C$ für alle n aus \mathbf{N} .

Bsp.II) Es ist zu zeigen, dass $f(x) := e^{-1/x^2}$ (für $x \neq 0$) , $f(0) := 0$ auf \mathbf{R} beliebig oft differenzierbar ist und alle Ableitungen im Nullpunkt verschwinden.

Man zeigt durch Induktion, dass $f(x)$ in 0 beliebig oft differenzierbar ist und alle

Ableitungen 0 werden. Außerhalb von $x = 0$ ist die Funktion beliebig oft differenzierbar, weil es sich um eine Verknüpfung zweier differenzierbarer Funktionen handelt.

Induktionsanfang: Untersuche die erste Ableitung $f^{(1)}(x)$ an der Stelle $x = 0$:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(0+h) - f(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^{-1/h^2}}{h} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{e^{1/h^2}}$$
 Wir betrachten eine Funktion von h , die Bedingungen für de l'Hospital sind erfüllt, wir können also nach h differenzieren:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{-\frac{1}{h^2}}{-\frac{2}{h^3}e^{1/h^2}} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{2e^{1/h^2}} = 0. \text{ Die Ableitung an der Stelle } x = 0 \text{ ist also } 0.$$

Induktionsvoraussetzung: Die Behauptung gelte für eine beliebiges, aber festes n aus \mathbf{N} .

Induktionsschritt($n \rightarrow n + 1$): Die n -te Ableitung $f^{(n)}(x)$ lässt sich darstellen in der Form $p_n(\frac{1}{x})e^{-\frac{1}{x^2}}$ mit geeignetem Polynom p_n . Also:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f^{(n)}(0+h) - f^{(n)}(0)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{p_n(\frac{1}{h})e^{-\frac{1}{h^2}}}{h}. \text{ Setze nun } x = \frac{1}{h} \text{ und betrachte den}$$

Limes für x gegen $+\infty$:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{p_n(x)e^{-x^2}}{1/x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} xp_n(x) e^{-x^2}. \text{ Dies ist aber nach ii)(s.o.) gleich Null, weil die Potenz von } e \text{ wesentlich schneller gegen unendlich geht als die Potenz von } x \text{ in Form des Polynoms } p_n(x).$$

Es ist also $f^{(n+1)}(0) = 0$ q.e.d.

3 Limitationen der Regel

Es ist nicht immer nötig bzw. irreführend, die Regel von de l'Hospital zu verwenden, wie die folgenden Fälle zeigen:

1. Man betrachte $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$. Sowohl Zähler - als auch Nennerfunktion konvergieren gegen unendlich (denn $e^{-x} \rightarrow 0$ für x gegen ∞ , $e^x \rightarrow \infty$).

Die Nennerfunktion ist desweiteren immer ungleich Null. Wendet man nun die Regel von de l'Hospital an, erhält man immer einen Bruch, bei dem Zähler und Nenner gegen unendlich konvergieren:

$$\frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}.$$

Klammert man jedoch zunächst sowohl im Zähler als auch im Nenner e^x aus, ist der Grenzwert einfach zu erkennen:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 - e^{-2x}}{1 + e^{-2x}} = \frac{1 - 0}{1 + 0} = 1.$$

2. Für $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x}$ laufen Zähler und Nenner gegen Null. Bildet man nun die Ableitung $\frac{2x \cos(1/x) + x^2(-1)\frac{1}{x^2}(-\sin(1/x))}{\cos x}$, sieht man, dass in diesem Fall, wenn x gegen 0 läuft, kein Grenzwert existiert.

Jedoch zeigt eine Umformung sofort, dass der Grenzwert 0 ist:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x^2 \cos(1/x)}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} \cdot (x \cos(1/x)) = 0.$$

3. Für $f(x) := x + \sin x \cos x$, $g(x) = f(x)e^{\sin x}$ ist $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x)}{g(x)}$ nicht vorhanden, obwohl

$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2 \cos x}{x + \sin x \cos x + 2 \cos x} e^{-\sin x}$ existiert und gleich 0 ist. Wo ist der Fehler?

$\frac{f(x)}{g(x)} = e^{-\sin x}$, das heißt, $\frac{f(x)}{g(x)}$ ist für $x \rightarrow +\infty$ begrenzt durch $\frac{1}{e}$ und e . Die Funktion divergiert.

$f(x)$ sowie $g(x)$ sind differenzierbar, beide Funktionen konvergieren gegen $+\infty$ für $x \rightarrow +\infty$.

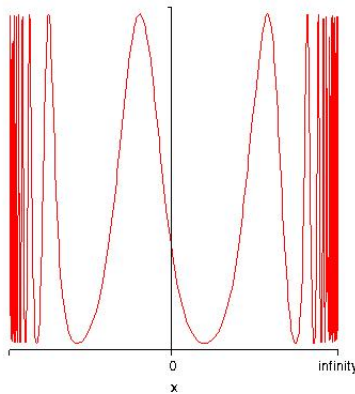


Abbildung 1: $f(x)/g(x)$

Der Fehler findet sich, wenn man $g'(x)$ betrachtet:

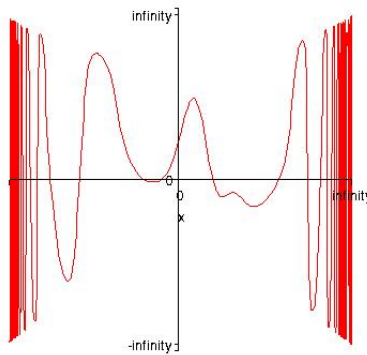


Abbildung 2: $g'(x)$

$$\begin{aligned}
 g'(x) &= (e^{\sin x}(x + \sin x \cos x))' \\
 &= \cos x e^{\sin x}(x + \sin x \cos x) + e^{\sin x}(1 + \cos^2 x - \sin^2 x) \\
 &= e^{\sin x}(x \cos x + \sin x \cos^2 x + 1 + \cos^2 x - \sin^2 x) \\
 &= e^{\sin x}(x \cos x + \sin x \cos^2 x + 2 \cos^2 x) \\
 &= e^{\sin x} \cos x(x + \sin x \cos x + 2 \cos x)
 \end{aligned}$$

An dieser Stelle sieht man, dass $g'(x)$ unendlich oft den Wert 0 annimmt, wenn x

gegen $+\infty$ läuft, denn $\cos x = 0$ für alle x aus $\{\frac{\pi}{2} + n\pi, n \in \mathbb{Z}\}$; aber dies bedeutet, dass die Voraussetzung der Regel von de l'Hospital, nach der $g'(x)$ immer ungleich 0 sein muss, nicht erfüllt ist.