Universität Paderborn
Warburger Str. 100
33098 Paderborn

SS2005

Seminararbeit

Der Fundamentalsatz der Algebra

Sabine Naewe

8. April 2005

Fundamentalsatz der Algebra

Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^n$ ein nichtkonstantes Polynom n-ten Grades mit $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$, wobei $n \geq 1$ und $a_n \neq 0$.
Dann existieren $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = a_n(z - z_1)\cdots(z - z_n)$.
Die $z_1, \ldots, z_n$ sind genau die Nullstellen von P: Es ist $P(z_j) = 0$ für $j = 1, \ldots, n$ und $P(z) \neq 0$ für $z \neq z_j \; \forall j \; = \; 1, \ldots, n$.

Beweisstruktur

Der Fundamentalsatz folgt aus drei eigenständigen Sätzen, die vorher jeweils einzeln bewiesen werden müssen.

Satz 1:

Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein nichtkonstantes Polynom n-ten Grades, wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Dann existiert ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.

Satz 2:

Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein nichtkonstantes Polynom n-ten Grades, wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Ist $|P(z_0)| > 0$ für ein $z_0 \in \mathbb{C}$, so existiert ein $w_0 \in \mathbb{C}$ mit $|P(w_0)| < |P(z_0)|$.

Satz 3:

Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein nichtkonstantes Polynom n-ten Grades, wobei a_0 ,$\ldots$, $a_n \in \mathbb{C}$.
Wenn ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$ existiert, dann existieren $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ mit $P(z) = a_n(z - z_1)\cdots(z - z_n)$.
Wenn diese Sätze bewiesen sind, dann folgt der eigentliche Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra. Dieser wird nun unter der Annahme geführt wird, dass die drei obrigen Sätze bereits bewiesen sind.

Beweis des Fundamentalsatzes:

Sei $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein nichtkonstantes Polynom n-ten Grades, wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Dann existiert nach Satz 1 ein $z_0 \in \mathbb{C}$ mit $|P(z_0)| = \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)|$.
Es gilt: $|P(z_0)| \geq 0$

Annahme: $|P(z_0)| > 0$

$\Rightarrow \exists\ w_0 \in \mathbb{C}$ mit $|P(w_0)| < |P(z_0)|$ (Satz 2)

$\Rightarrow |P(w_0)| < \inf |P(z)|$ mit z $\in \mathbb{C}$.

(Widerspruch zur Annahme, da $|P(w_0)| \in \{|P(z)|$ mit $z \in \mathbb{C}\}$)

$\Rightarrow |P(z_0)| = 0 = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$

Damit ist eine komplexe Nullstelle von P(z) gefunden. Nach Satz 3 ist damit der Fundamentalsatz der Algebra bewiesen.

Beweis von Satz 1:

Für diesen Beweis nutzt man die Tatsache, dass eine stetige Funktion auf einem kompakten Intervall beschränkt ist und damit sein Infimum annimmt.
Man zeigt als erstes, dass eine genügend große Kreisscheibe zur Betrachtung ausreicht um das Infimum $\inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$ zu bestimmen.
Wähle $R \in [1, \infty[$ so, dass gilt:

$$R \geq 2n|\tfrac{a_i}{a_n}| \text{ für } i = 0, \ldots, n-1$$

Dabei ist $a_n \neq 0$ nach Voraussetzung.
Man wählt den Betrag von P, da kein Vergleich von komplexen Zahlen möglich ist.
Nun gilt für jedes z$\in \mathbb{C}$ mit $|z| \geq R \geq 1$:

$$\begin{aligned}
\text{P(z)} &= |\sum_{k=0}^{n} a_k z^k| \\
&= |a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^k| \\
&= |a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k z^{n-(n-k)}| \\
&= |a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} a_k \tfrac{z^n}{z^{n-k}}| \\
&= |a_n z^n + \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{a_k}{a_n z^{n-k}} a_n z^n| \\
&= |a_n z^n + a_n z^n \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{a_k}{a_n z^{n-k}}| \\
&= |a_n z^n[1 + \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{a_k}{a_n z^{n-k}}]| \\
&= |a_n z^n||1 + \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{a_k}{a_n z^{n-k}}| \\
&\geq |a_n z^n|(|1| - |\sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{a_k}{a_n z^{n-k}}|) && \text{da } |a+b| \geq |a| - |b| \\
&\geq |a_n z^n|(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |\tfrac{a_k}{a_n z^{n-k}}|) && \text{da } |\sum b| \leq \sum |b| \Rightarrow -|\sum b| \geq -\sum |b| \\
&\geq |a_n z^n|(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |\tfrac{a_k}{a_n}|\ |\tfrac{1}{z}|^{n-k}) \\
&\geq |a_n z^n|(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |\tfrac{a_k}{a_n}|\ |\tfrac{1}{z}|) && \text{da } |\tfrac{1}{z}| \leq 1 \\
&\geq |a_n z^n|(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |\tfrac{a_k}{a_n}|\ |\tfrac{1}{R}|) && |z| \geq R \Rightarrow\ |\tfrac{1}{z}| \leq \tfrac{1}{R} \Rightarrow\ -|\tfrac{1}{z}| \geq -\tfrac{1}{R} \\
& && 1 - \sum |\tfrac{1}{z}| = 1 - |\tfrac{1}{z}| \sum = 1 + (-|\tfrac{1}{z}|) \sum \\
& && \geq 1 + (-\tfrac{1}{R}) \sum = 1 - \tfrac{1}{R} \sum = 1 - \sum \tfrac{1}{R}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= |a_n z^n|(1 - \sum_{k=0}^{n-1} |\tfrac{a_k}{a_n R}|) && \text{da } |z| \geq R \geq 1 \\
&\geq |a_n z^n|(1 - \sum_{k=0}^{n-1} \tfrac{1}{2n}) && \text{da } R \geq 2n|\tfrac{a_i}{a_n}| \\
&= |a_n z^n|(1 - n\tfrac{1}{2n}) \\
&= |a_n z^n|\tfrac{1}{2} \\
&= \tfrac{|a_n|}{2}|z^n|
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow |P(z)| \geq \frac{|a_n|}{2}|z^n|$

Setze $R_0 := \max\{R, 2\frac{|a_0|}{|a_n|}\}$
Dann gilt für $|z| \geq R_0$:

$$
\begin{aligned}
|P(z)| &\geq \tfrac{|a_n|}{2}|z^n| \\
&= \tfrac{|a_n|}{2}|z|^n \\
&\geq \tfrac{|a_n|}{2}|z| && \text{da } |z| \geq R_0 \geq R \geq 1 \\
&\geq \tfrac{|a_n|}{2}2\tfrac{|a_0|}{|a_n|} && \text{da } |z| \geq R_0 = \max\{R, 2\tfrac{|a_0|}{|a_n|}\} \\
&= |a_0| \\
&= |P(0)|
\end{aligned}
$$

Also gilt nun für $|z| \geq R_0 \geq R \geq 1$:

$$|P(z)| \geq |P(0)|$$

$\Rightarrow |P(z)|_{|z| \geq R_0} \geq |P(0)| \Rightarrow \inf_{z \in \mathbb{C}} |P(z)| = \inf_{|z| \leq R_0} |P(z)|$

Die Funktion $z \mapsto |P(z)|, M \to \mathbb{R}$ ist auf $M = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| \leq R_0\}$ stetig, da $|P(z)|$ reell ist und alle Polynomfunktionen stetig sind. M ist beschränkt und abgeschlossen, da $|z| \in [0, R_0]$.
Nun gilt, dass eine Menge M kompakt ist, wenn $M \subset \bigcup_{i \in I} U_i$ und $I \subseteq \mathbb{N}$ endlich ist. Nach dem Überdeckungssatz von Heine-Borel gilt dies auch für Teilmengen in $\mathbb{R}$. Gleichzeitig kann man beweisen, dass eine Menge $M \in \mathbb{C}$ kompakt ist, wenn sie abgeschlossen und beschränkt ist. Dann besitzt jede Folge in M eine in M konvergente Teilfolge.
Diese Überlegungen nehmen wir nun als gegeben an, da dies erst in der Analysis II behandelt wird.

$|P(M)| = \{|P(z)| \mid z \in M\}$

Sei $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $|P(M)|$

Wähle $x_n \in M$ mit $|P(x_n)| = y_n$ und betrachte die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Definition:

Eine Menge $M \subseteq \mathbb{C}$ ist kompakt, wenn jede Folge in M ein in M konvergente Teilfolge besitzt.

Da M kompakt ist, $\exists\ x_0 \in M$ und eine Teilfolge $(x_{n_t})_{t\in\mathbb{N}}$ mit

$x_{n_t} \to\ x_0$

Da P stetig ist $\Rightarrow\ |P(x_{n_t})| = y_{n_t}\ \to\ y_0 := |P(x_0)| \in |P(M)|$

d.h. $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt in $|P(M)|$ eine konvergente Teilfolge.

$\Rightarrow\ |P(M)|$ ist kompakt und nicht leer, da $M \neq \emptyset$

z.z. $\exists\ s_0 \in |P(M)|$ mit $s_0 \leq s\ \forall\ s \in |P(M)|$

Sei $s_0 := \inf |P(M)|$ (Es existiert, da $|P(M)|$ kompakt und damit beschränkt ist.)

z.z. $s_0\ \in |P(M)|$

Wähle ein Zahl $s_0 + \frac{1}{n}$ mit $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow\ s_0\ <\ s_0 + \frac{1}{n}$

Damit ist $s_0 + \frac{1}{n}$ kein untere Schranke von $|P(M)|$

$\exists\ s_n\ \in |P(M)|$ mit $s_n < s_0 + \frac{1}{n}$

$$s_0 + \tfrac{1}{n}\ >\ s_n\ \geq\ s_0\ = \inf |P(M)|$$

$\Rightarrow\ \lim_{n\to\infty} s_n = s_0$, da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$

Da M kompakt und damit abgeschlossen ist $\Rightarrow\ s_0\ \in |P(M)|$

$\Rightarrow$ Die Funktion $z \mapsto |P(z)|$ nimmt ihr Infimum an

$\Rightarrow \exists z_0 \in [0, |R_0|]$ mit

$$|P(z_0)| = \inf_{|z|\leq R_0} |P(z)| = \inf_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$$

Damit ist Satz 1 bewiesen.

Beweis von Satz 2

Um den eigentlichen Beweis dieses Satzes zu führen, benötigt man drei kurze Lemmata.

Lemma 1:

Behauptung: $\forall K \in \mathbb{N} \;\; \exists\, \varepsilon$ mit $0 < \varepsilon\, K < 1 : \;\forall\, \lambda$ mit $0 \;<\; \lambda \;\leq\; \varepsilon \;:$

$$(1 - \lambda^n + K\lambda^{n+1}) < 1$$

wobei $n \in \mathbb{N}$

Beweis: Sei $K \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}$

Wähle ein ε mit $0 < \varepsilon K < 1$

$\Rightarrow \; 0 \;<\; K\,\lambda \;<\; K\,\varepsilon \;<\; 1$

$\Rightarrow \; K\,\lambda \;<\; 1$

$\Rightarrow \; K\,\lambda^{n+1-n} \;<\; 1$

$\Rightarrow \; K\,\frac{\lambda^{n+1}}{\lambda^n} \;<\; 1$

$\Rightarrow \; K\,\lambda^{n+1} \;<\; \lambda^n$ da $\lambda \;>\; 0 \;\Rightarrow\; \lambda^n \;>\; 0$

$\Rightarrow \; 1 \;+\; K\,\lambda^{n+1} \;<\; 1 \;+\; \lambda^n$

$\Rightarrow \; 1 \;-\; \lambda^n \;+\; K\,\lambda^{n+1} \;<\; 1$

Damit ist das Lemma 1 bewiesen. Mit diesem kann man nun Lemma 2 beweisen.

Lemma 2:

Behauptung: $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ sei eine beschränkte Funktion

$$\Rightarrow \exists\; \varepsilon > 0 \text{ mit } \forall \lambda \in\,]0, \varepsilon] : |1 - \lambda^n + \lambda^{n+1} f(\lambda)| < 1$$

Beweis: Sei $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ eine beschränkte Funktion

$\Rightarrow \exists\; K \;\in \mathbb{N} \;:\; |f(\lambda)| \leq K \;\forall\; \lambda \;\in\; [0, 1]$

Wähle ein ε mit $0 < \varepsilon K < 1$

Für $0 < \lambda \leq \varepsilon$ gilt dann mit Lemma 1:

$$\begin{aligned} |1 - \lambda^n + \lambda^{n+1} f(\lambda)| &\leq |1 - \lambda^n| \;+\; |\lambda^{n\,+\,1}\; f(\lambda)| \\ &= 1 - \lambda^n \;+\; |\lambda^{n\,+\,1}|\; |f(\lambda)| \qquad \text{da } 1 \;-\; \lambda^n \;>\; 0 \\ &\leq 1 - \lambda^n \;+\; |\lambda^{n\,+\,1}|\; K \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= 1 - \lambda^n + \lambda^{n+1}K \\ &< 1 \qquad \text{(Lemma 1)} \end{aligned}$$

Damit ist nun Lemma 2 bewiesen. Nun folgt aus diesem Lemma das dritte Lemma.

Lemma3:

Behauptung: Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ ein nichtkonstantes Polynom n-ten Grades , wobei $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{C}$.
Sei $a_0 \neq 0$
$\Rightarrow \exists\ z_0 \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit

$$\forall \lambda \text{ mit } 0 < \lambda \leq \varepsilon \ : \ |P(\lambda z_0)| < |a_0| = |P(0)|$$

Beweis: $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$
Wir schreiben:
$P(z) = a_0 + a_k z^k + \ldots + a_n z^n$
Hierbei ist k der erste Index nach dem Index 0, für den $a_k \neq 0$. Dieser muss existieren, da wir eine nichtkonstante Polynomfunktion voraussetzen. Da nach Vorausetzung $a_0 \neq 0$, gilt:

$$\tfrac{1}{a_0}P(z) = 1 + \tfrac{1}{a_0}a_k z^k + \ldots + \tfrac{1}{a_0}a_n z^n$$

Nun nehmen wir an, dass $a_0 = 1$. Dadurch wird das allgemeine Ergebnis nicht verändert.

$$\Rightarrow P(z) = 1 + a_k z^k + \ldots + a_n z^n$$

Jetzt wählen wir ein z_0 mit $z_0^k = \frac{-1}{a_k}$
Dann gilt für alle λ:

$$\begin{aligned} P(\lambda z_0) &= 1 + a_k \lambda^k z_0^k + \ldots + a_n \lambda^n z_0^n \\ &= 1 + a_k \lambda^k \tfrac{-1}{a_k} + \ldots + a_n \lambda^n z_0^n \\ &= 1 - \lambda^k + \lambda^{k+1} f(\lambda) \end{aligned}$$

Bei der letzten Umformung wurde eine geeignete Polynomfunktion $f : \lambda \mapsto f(\lambda)$ genutzt. Da f als Polynomfunktion stetig und somit auf $[0, 1]$ beschränkt ist, haben wir die Ausgangsfunktion P so umgeformt, dass das zweite Lemma anwendbar ist.
$\Rightarrow \exists\ \varepsilon > 0$ mit $\forall \lambda \in]0, \varepsilon[$:

$$|1 - \lambda^k + \lambda^{k+1} f(\lambda)| < 1$$

$$P(\lambda z_0) \;=\; |1-\lambda^k+\lambda^{k+1}f(\lambda)| \;<\; 1 \;=\; a_0 \;=\; |a_0| \;=\; |P(0)|$$

Nun ist auch das dritte Lemma bewiesen, mit welchem man nun den zweiten Satz beweisen kann.

Beweis von Satz 2:

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ eine nichtkonstante Polynomfunktion über $\mathbb{C}$ und gelte $P(z_0) \neq 0$.
Wir wählen nun eine geeignete Polynomfunktion Q mit $Q(z-z_0) = P(z)$ für alle $z \in \mathbb{C}$, indem wir $P(z) = P(z - z_0 + z_0)$ ausrechnen.
Dann gilt: $Q(0) = Q(z_0 - z_0) = P(z_0) \neq 0$
$\Rightarrow Q(w) = b_0 + b_k w^k + \ldots + b_n w^n$
mit $b_0 = Q(0) \neq 0$ und $b_k \neq 0$, da P nicht konstant ist. Würde kein $b_k \neq 0$ existieren, wäre Q konstant und damit auch P.

Nun gilt wegen Lemma 3:
$\exists\ x \in \mathbb{C}$ und ein $\varepsilon > 0$ mit $\forall\ \lambda$:

$$|Q(\lambda x)| < |b_0| = |Q(0)|$$
$$\Rightarrow |Q(\lambda x)| < |Q(0)|$$

Dann gilt für $w_0 := \lambda x + z_0$:

$$|P(w_0)| = |Q(w_0 - z_0)| = |Q(\lambda x| < |Q(0)| = |P(z_0)|$$
$$\Rightarrow |P(w_0)| < |P(z_0)|$$

Damit ist der Satz 2 bewiesen.

Beweis von Satz 3:

In diesem Beweis wendet man die Tatsache an, dass aus Satz 1 und Satz 2 folgt, dass ein Polynom n-ten Grades eine komplexe Nullstelle besitzt. (siehe Beweis des Fundamentalsatzes)

Sei $P(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^n$ ein nichtkonstantes Polynom n-ten Grades mit a_0 ,..., $a_n \in \mathbb{C}$.
$\Rightarrow \exists z_1 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_1) = 0$.
Es gilt : $z = (z - z_1) + z_1$
Dies setzen wir nun in $P(z)$ ein und benutzen dabei $(a + b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$:

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n \\
&= a_0 + a_1[(z - z_1) + z_1] + a_2[(z - z_1) + z_1]^2 + \ldots + a_n[(z - z_1) + z_1]^n \\
&= a_0 + a_1(z - z_1) + a_1 z_1 + a_2 \sum_{k=0}^{2} \binom{2}{k}(z - z_1)^k z_1^{2-k} + \ldots + a_n \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(z - z_1)^k z_1^{n-k} \\
&= a_0 + a_1(z - z_1) + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + a_2 \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k}(z - z_1)^k z_1^{2-k} + \ldots + a_n z_1^n \\
&\qquad + a_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(z - z_1)^k z_1^{n-k} \\
&= a_0 + a_1 z_1 + a_2 z_1^2 + \ldots + a_n z_1^n + a_1(z - z_1) \\
&\qquad + a_2 \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k}(z - z_1)^k z_1^{2-k} + \ldots + a_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(z - z_1)^k z_1^{n-k} \\
&= P(z_1) + a_1(z - z_1) + a_2 \sum_{k=1}^{2} \binom{2}{k}(z - z_1)^k z_1^{2-k} + \ldots + a_n \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k}(z - z_1)^k z_1^{n-k} \\
&= b_0 + b_1(z - z_1) + b_2(z - z_1)^2 + \ldots + a_n(z - z_1)^n \\
&= a_n(z - z_1)[b_1 \tfrac{1}{a_n} + b_2 \tfrac{z - z_1}{a_n} + \ldots + (z - z_1)^{n-1}]
\end{aligned}
$$

Dabei sind $b_0, \ldots, b_{n-1}$ geeignete Elemente aus $\mathbb{C}$ und es gilt $b_0 = P(z_1) = 0$.

$\Rightarrow P(z) = a_n(z - z_1)P_1(z)$
Hierbei gilt, dass $P_1(z)$ eine Polynomfunktion vom Grad $(n - 1)$ ist.
Es gilt: $P_1(z) = (z - z_1)^{n-1} + \ldots + \frac{b_1}{a_n} = z^{n-1} + \ldots$

Nun gilt wiederum mit Satz 1 und Satz 2, dass $P_1(z)$ eine komplexe Nullstelle besitzt. Wir wenden nun das gleiche Verfahren wie bei $P(z)$ an und erhalten damit:

$$P_1(z) = (z - z_2)P_2(z)$$

wobei $z_2 \in \mathbb{C}$ mit $P_1(z_2) = 0$

Hierbei gilt nun, dass $P_2(z)$ eine Polynomfunktion $(n-2)$-ten Grades ist.
$\Rightarrow P(z) = a_n(z-z_1)(z-z_2)P_2(z)$
Nun folgt mit vollständiger Induktion, dass nach $(n-2)$ Schritten P in n Linearfaktoren zerfällt und damit genau n komplexe Nullstellen besitzt.

Induktion

Induktionsbehauptung: P zerfällt in n Linearfaktoren

Induktionsvoraussetzung: $n = 1 : P(z) = a_0 + a_1 z$
Nach Satz 1 und Satz 2 $\exists z_0 \in \mathbb{C}$ mit $P(z_0) = 0$
Wir setzen wiederum $z = (z - z_0) + z_0$

$$
\begin{aligned}
P(z) &= a_0 + a_1\ [(z-z_0) + z_0] \\
&= a_0 + a_1(z-z_0) + a_1 z_0 \\
&= a_1\ (z-z_0)\ [\tfrac{a_o}{a_1(z-z_0)} + 1 + \tfrac{z_o}{z-z_0}] \\
&= a_1\ (z-z_0)\ [\tfrac{a_0}{a_1(z-z_0)} + 1 + \tfrac{a_1 z_0}{a_1(z-z_0)}] \\
&= a_1\ (z-z_0)\ [\tfrac{a_0 + a_1 z_0}{a_1(z-z_0)} + 1] \\
&= a_1\ (z-z_0)\ [\tfrac{P(z_0)}{a_1(z-z_0)} + 1] \\
&= a_1\ (z-z_0)\ [\tfrac{0}{a_1(z-z_0)} + 1] \\
&= a_1\ (z-z_0)\ 1 \\
&= a_1\ (z-z_0)
\end{aligned}
$$

Induktionsbehauptung: Die Behauptung sei richtig für ein festes $n \geq 1$.

Induktionsschluss: $P(z) = \sum\limits_{k=0}^{n+1} a_k z^k$
Sei z_0 die komplexe Nullstelle von P, die nach Satz 1 und 2 existiert. Dann gilt wegen obigen Beweis:

$$
\begin{aligned}
P(z) &= \sum_{k=0}^{n+1} a_k z^k \\
&= a_{n+1}\ [(z-z_0)(b_0 + \ldots + (z-z_0)^n] \\
&= a_{n+1}\ (z-z_0)(z-z_1)\ldots(z-z_n)
\end{aligned}
$$

Hierbei sind $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ die Nullstellen der Polynomfunktion n-ten Grades.
Nun ist mit vollständiger Induktion bewiesen, das P in n Linearfaktoren zerfällt und genau n komplexe Nullstellen besitzt.

Damit ist Satz 3 bewiesen.

Nun sind alle drei Sätze, die zum Beweis des Fundamentalsatzes der Algebra benötigt wurden, bewiesen. Damit sind alle Annahmen für den Beweis des Fundamentalsatz der Algebra bewiesen, so dass nun dieser Beweis gültig ist.