

Der Satz von Hermite-Lindemann

Olaf Klinke*

25. April 2005

1 Definitionen

Definition 1 $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt algebraisch, wenn es ein Polynom P mit ganzzahligen Koeffizienten gibt so daß gilt $P(\alpha) = 0$.

Das eindeutig bestimmte Polynom $P_\alpha \in \mathbb{Q}[x]$ mit $P_\alpha(\alpha) = 0$, minimalem Grad und Leitkoeffizient 1 heißt das Minimalpolynom von α . Es bezeichne $\deg(\alpha) := \deg(P_\alpha) =: d$ den Grad des Minimalpolynoms. Man sagt, α ist algebraisch vom Grad d .

Eine Funktion $f : \Omega \rightarrow \mathbb{C}$ auf einer offenen Menge $\Omega \subseteq \mathbb{C}$ heißt algebraisch vom Grad d , wenn es Polynome P_0, \dots, P_d gibt, die nicht alle Null sind, so daß gilt:

$$\forall x \in \Omega : (P_d f^d + \dots + P_1 f + P_0)(x) = 0.$$

Definition 2 Sei $\alpha \in \mathbb{C}$ algebraisch vom Grad d und $\alpha_1, \dots, \alpha_d$ die Nullstellen des Minimalpolynoms von α . Setze

$$|\overline{\alpha}| := \max_i |\alpha_i|$$

Definition 3 Sei α algebraisch. Dann bezeichnet $\text{den}(\alpha)$ die kleinste natürliche Zahl k so daß das Minimalpolynom von $k\alpha$ nur ganzzahlige Koeffizienten hat. Eine algebraische Zahl α mit $\text{den}(\alpha) = 1$ heißt ganz-algebraisch.

Entsprechend heißt k ein gemeinsamer Nenner zweier algebraischer Zahlen α und β , wenn sowohl $k\alpha$ als auch $k\beta$ ganz-algebraisch sind.

Bemerkung: Zu jeder algebraischen Zahl α gibt es eine natürliche Zahl k so daß $k\alpha$ ganz-algebraisch ist.¹

Beispiel: $\sqrt{2}$ ist ganz-algebraisch. Jede ganze Zahl ist ganz-algebraisch.

1.1 Zahlkörper

Definition 4 Ein Unterkörper \mathbb{K} von \mathbb{C} heißt Zahlkörper vom Grad d , wenn \mathbb{K} ein \mathbb{Q} -Vektorraum der Dimension d ist.

Sei α algebraisch vom Grad d . Man kann leicht zeigen, daß $1, \alpha, \dots, \alpha^{d-1}$ über \mathbb{Q} linear unabhängig sind.² Diese Zahlen bilden sogar eine Basis eines Zahlkörpers:

*olf@math.uni-paderborn.de

¹D. Duverney: Théorie des nombres, Théorème 9.3

²D. Duverney: Théorie des nombres, exercice 10.2

Definition 5 Sei α algebraisch vom Grad d . Dann ist

$$\mathbb{Q}(\alpha) := \left\{ \sum_{i=0}^{d-1} a_i \alpha^i \mid a_0, \dots, a_{d-1} \in \mathbb{Q} \right\}$$

ein Zahlkörper vom Grad d .

In einem solchen Zahlkörper \mathbb{K} gibt es genau d Automorphismen, die \mathbb{Q} invariant lassen³, d.h. Abbildungen σ mit folgenden Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \forall x, y \in \mathbb{K}, \forall r \in \mathbb{Q} : \\ \sigma(x + y) &= \sigma(x) + \sigma(y) \\ \sigma(xy) &= \sigma(x)\sigma(y) \\ \sigma(r) &= r \end{aligned}$$

Solche Morphismen werden *Konjugations-Morphismen* genannt. Die ganz-algebraischen Zahlen des Zahlkörpers \mathbb{K} bilden einen Ring und werden mit $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ bezeichnet.

Definition 6 Sei \mathbb{K} ein Zahlkörper vom Grad d und $\alpha \in \mathbb{K}$. Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ die Konjugationsmorphismen. Dann heißt

$$N(\alpha) := \prod_{i=1}^d \sigma_i(\alpha)$$

die Norm von α .

Bemerkung: Für solche Zahlkörper gilt stets $N(\alpha) \in \mathbb{Q}$. Ist $\alpha \in \mathbb{K}$ ganz-algebraisch, dann ist $N(\alpha) \in \mathbb{Z}$.⁴

Beispiel: Die imaginäre Einheit i ist ganz-algebraisch vom Grad 2, denn das zugehörige Minimalpolynom ist $P(x) = x^2 + 1$. Im Zahlkörper $\mathbb{Q}(i)$ gibt es als Konjugationsmorphismen die Komplexe Konjugation und die Identität, so daß hier gilt: $N(\alpha) = \alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$.

Definition 7 $\alpha \in \mathbb{C}$ heißt *transzendent* wenn α nicht algebraisch ist, d.h. es gibt kein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten, welches α als Nullstelle hat. Entsprechend heißt eine Funktion *transzendent*, wenn sie nicht algebraisch ist.

2 Einige Lemmata

Lemma 1 (von Siegel) Seien $n, m \in \mathbb{N}$, $n > m$.

Sei $A = (A_{ij})_{1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n} \in \mathbb{Z}^{m \times n}$ mit

$$\|A\|_{\max} \leq A, \quad A \in \mathbb{N}.$$

Dann gibt es einen Vektor $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n$ mit $\|x\|_{\max} \leq (nA)^{\frac{m}{n-m}}$, $x \neq 0$, sodaß $Ax = 0$.

³D. Duverney: Théorie des nombres, Théorème 10.2

⁴D. Duverney: Théorie des nombres, 10.3

Beweis: Es bezeichne $-V_j$ die Summe der negativen Einträge in der j -ten Zeile der Matrix \mathcal{A} , W_j die Summe der positiven Einträge. Es gilt dann

$$\forall j \in \{1, \dots, m\} : V_j + W_j \leq nA.$$

Sei $X \in \mathbb{N}$. Für ein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit $\|x\|_{\max} \leq X$ setze $y = \mathcal{A}x$. Für den j -ten Eintrag y_j in y gilt dann die Abschätzung

$$-V_j X \leq y_j \leq W_j X. \quad (1)$$

Die Menge

$$\mathbb{E} := \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{Z}^n \mid 0 \leq x_i \leq X, 1 \leq i \leq n\}$$

hat $(X+1)^n$ Elemente. Die Menge

$$\mathbb{F} := \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{Z}^m \mid y = \mathcal{A}x\}$$

hat wegen (1) höchstens $(nAX+1)^m$ Elemente.

Wähle nun $X = \lfloor (nA)^{\frac{m}{n-m}} \rfloor$. Dann ist wegen $X > (nA)^{\frac{m}{n-m}} - 1$

$$\begin{aligned} (X+1)^{n-m} &> (nA+1)^m > (nA)^m \\ \Rightarrow (X+1)^n &> (nA)^m (X+1)^m = (nAX+nA)^m \geq (nAX+1)^m. \end{aligned}$$

Daher gilt $|\mathbb{E}| < |\mathbb{F}|$; die Abbildung

$$\mathbb{E} \rightarrow \mathbb{F}, x \mapsto \mathcal{A}x$$

kann somit nicht injektiv sein. Also

$$\exists x', x'' \in \mathbb{E} : \mathcal{A}x' = \mathcal{A}x'' \Rightarrow \mathcal{A}(x' - x'') = 0.$$

□

Lemma 2 Sei \mathbb{K} ein Zahlkörper vom Grad d . Sei $A \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{A} \in \mathbb{A}_{\mathbb{K}}^{m \times n}$ mit $\|\mathcal{A}\|_{\max} \leq A$ und $n < dm$.

Dann gibt es eine von n und m unabhängige Schranke $M > 0$ und ein $x \in \mathbb{N}^n$ mit $\|x\|_{\max} \leq (nMA)^{\frac{dm}{n-dm}}$ so daß $\mathcal{A}x = 0$.

Beweis: Sei $\{\omega_1, \dots, \omega_d\}$ eine Basis des Ringes $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ als \mathbb{Z} -Modul⁵. Also hat jeder Eintrag der Matrix \mathcal{A} eine eindeutige Darstellung

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^d a_{ijk} \omega_k; a_{ijk} \in \mathbb{Z}.$$

Die Zeilen der Gleichung $\mathcal{A}x = 0$ schreiben sich also als

$$\sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^d a_{ijk} \omega_k x_j = 0.$$

Da die ω_k unabhängig in $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ sind, ist dies äquivalent zu

$$\forall k \in \{1, \dots, d\} : \sum_{j=1}^n a_{ijk} x_j = 0.$$

⁵Ein Modul ist im wesentlichen wie ein Vektorraum, nur über einem Ring anstatt über einem Körper. vgl D. Duverney: Théorie des nombres, Théorème 10.8

Nun haben wir ein Gleichungssystem mit dm Gleichungen und n Unbekannten und ganzzahligen Koeffizienten und wenden daher Lemma 1 an:
Es gibt ein $x \in \mathbb{Z}^n$ mit

$$\forall i \in \{1, \dots, n\} : 0 < \max_i |x_i| \leq \left(n \max_{i,j,k} |a_{ijk}| \right)^{\frac{dm}{n-dm}}, \mathcal{A}x = 0.$$

Für den Betrag der Koeffizienten a_{ijk} gibt es eine nur vom Ring $\mathbb{A}_{\mathbb{K}}$ abhängige Schranke $M > 0$ so daß gilt:

$$\max_{i,j,k} |a_{ijk}| \leq M \max_{i,j} |A_{ij}|.$$

□

Lemma 3 *Die Exponentialfunktion ist transzendent.*

Beweis: Angenommen \exp sei algebraisch vom Grad d . Seien P_0, \dots, P_d Polynome, $P_d \neq 0$. Es gelte

$$\forall x \in \mathbb{C} : P_d(x)e^{dx} + \dots + P_0(x) = 0.$$

Die e -Funktion hat keine Nullstelle, wir teilen die Gleichung durch e^{dx} :

$$P_d(x) = -P_{d-1}(x)e^{-x} - \dots - P_0(x)e^{-dx}.$$

Betrachten wir nun reelle x und lassen x gegen $+\infty$ laufen, so geht die rechte Seite gegen Null. Dies ist ein Widerspruch zu $P_d \neq 0$. □

Lemma 4 *Sei α algebraisch vom Grad d . Dann gilt*

$$|\alpha| \geq (|\overline{\alpha}|)^{1-d} (\text{den}(\alpha))^{-d}.$$

Beweis: Setze $\alpha = \frac{\beta}{a}$ mit $a = \text{den}(\alpha)$. Also ist β ganz-algebraisch. Es gilt daher $N(\beta) \in \mathbb{Z} \Rightarrow |N(\beta)| \geq 1$. Seien $\sigma_1, \dots, \sigma_d$ die Konjugationsmorphismen im Körper $\mathbb{Q}(\alpha)$. Dann ist

$$\begin{aligned} |N(\alpha)| &= |\sigma_1(\alpha) \dots \sigma_d(\alpha)| \\ &= \left| \sigma_1\left(\frac{\beta}{a}\right) \dots \sigma_d\left(\frac{\beta}{a}\right) \right| \\ &= |\sigma_1(\beta) \dots \sigma_d(\beta)| a^{-d} \\ &= |N(\beta)| a^{-d} \\ &\geq a^{-d}. \end{aligned}$$

Es gilt per Definition $\forall i \in \{1, \dots, d\} : |\sigma_i(\alpha)| \leq |\overline{\alpha}|$. Also

$$|N(\alpha)| = |\alpha| |\sigma_2(\alpha) \dots \sigma_d(\alpha)| \geq a^{-d}.$$

Also

$$|\alpha| |\overline{\alpha}|^{d-1} \geq a^{-d} \Leftrightarrow |\alpha| \geq |\overline{\alpha}|^{1-d} (\text{den}(\alpha))^{-d}.$$

□

Lemma 5 Seien $i, j, k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Dann ist die k -te Ableitung

$$\frac{d^k}{dx^k} (x^i e^{jx}) = \sum_{l=0}^{\min(k,i)} c_{kl} x^{i-l} e^{jx} \text{ wobei} \quad (2)$$

$$c_{kl} = \binom{k}{l} i(i-1) \dots (i-l+1) j^{k-l}. \quad (3)$$

Beweis: Beweis durch vollständige Induktion.

Wir betrachten zunächst den Ausdruck

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx} \left(\sum_{l=0}^{\min(k,i)} c_{kl} x^{i-l} e^{jx} \right) &= \sum_{l=0}^{\min(k,i)} c_{kl} x^{i-l} j e^{jx} + c_{kl} (i-l) x^{i-l-1} e^{jx} \\ &= \sum_{l=0}^{\min(k+1,i)} (j c_{kl} + (i-l+1) c_{k,l-1}) x^{i-l} e^{jx} \end{aligned}$$

hieraus ergibt sich für die c_{kl} die Rekurrenzgleichung

$$c_{k+1,l} = j c_{kl} + (i-l+1) c_{k,l-1}; \quad c_{0,l} = \begin{cases} 1 & \text{für } l = i \\ 0 & \text{sonst} \end{cases} \quad (4)$$

Der Induktionsanfang ist korrekt: Nach (3) ist $c_{0,0} = 1$. Für den Induktionsschritt genügt es die Rekurrenzgleichung (4) zu zeigen. Wir halten fest:

$$c_{k+1,l} = \binom{k+1}{l} i(i-1) \dots (i-l+1) j^{k+1-l}.$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned} & j c_{kl} + (i-l+1) c_{k,l-1} \\ &= \binom{k}{l} i(i-1) \dots (i-l+1) j j^{k-l} + \binom{k}{l-1} i(i-1) \dots (i-(l-1)+1) (i-l+1) j^{k+1-l} \\ &= \left(\binom{k}{l} + \binom{k}{l-1} \right) i(i-1) \dots (i-l+1) j^{k-l+1} \\ &= \binom{k+1}{l} i(i-1) \dots (i-l+1) j^{k+1-l} \\ &= c_{k+1,l} \end{aligned}$$

Die c_{kl} erfüllen also die Rekurrenzgleichung. □

3 Der Satz von Hermite-Lindemann

Satz 6 (von Hermite-Lindemann) Sei $\alpha \neq 0$ algebraisch. Dann ist e^α transzendent.

Beweisidee: Beweis durch Widerspruch. Man betrachtet ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten in den Unbekannten α und e^α . Mit Hilfe des Lemmas von Siegel und Lemma 2 stellt man sicher, daß betragsmäßig nicht zu große Koeffizienten existieren so daß alle Ableitungen der Funktion an den Stellen 0 und α

bis zu einem vorgegeben Grad verschwinden.

Da die e -Funktion nicht algebraisch ist (Lemma 3) ist die betrachtete Funktion nicht die Nullfunktion. Daher gibt es einen Ableitungsgrad so daß die Hilfsfunktion bei 0 oder α einen von Null verschiedenen Wert annimmt.

Diesen Wert schätzt man mithilfe von Lemma 5 ab und benutzt zuletzt die Ungleichung aus Lemma 4 um einen Widerspruch für sehr großen Ableitungsgrad herzuleiten.

Die Transzendenz von e und π folgt dann als einfaches Korollar.

Beweis: Wir definieren zunächst eine Hilfsfunktion:

Es sei $n \in \mathbb{N}$, $p = \lfloor \frac{n}{\ln n} \rfloor$, $q = \lfloor \ln^2 n \rfloor$, $a_{ij} \in \mathbb{Z}$. Setze

$$F_n(x) := \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{ij} x^i e^{jx}. \quad (5)$$

Sei nun α algebraisch. Annahme: e^α ist ebenfalls algebraisch.

Sei $\mathbb{K} := \mathbb{Q}(\alpha, e^\alpha)$ der von α und e^α erzeugte Zahlkörper vom Grad d . Sei a ein gemeinsamer Nenner von α und e^α .

Wir betrachten folgendes Gleichungssystem:

$$F_n(0) = 0, \dots, F_n^{(n-1)}(0) = 0, \quad (6)$$

$$F_n(\alpha) = 0, \dots, F_n^{(n-1)}(\alpha) = 0. \quad (7)$$

Das Gleichungssystem besteht aus $2n$ Gleichungen und hat die $(p+1)(q+1) \geq n \ln n$ Unbekannten a_{ij} . Nach Lemma 5 haben wir folgende Formel für die k -te Ableitung von F_n :

$$F_n^{(k)}(x) = \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q a_{ij} \sum_{l=0}^{\min(k,i)} \binom{k}{l} i(i-1) \dots (i-l+1) j^{k-l} x^{i-l} e^{jx}. \quad (8)$$

Für die Gleichungen (6) haben die a_{ij} also ganzzahlige Koeffizienten. Wir können die restlichen Gleichungen (7) mit geeigneten Potenzen des gemeinsamen Nenners a multiplizieren, so daß die Koeffizienten der a_{ij} ganz-algebraisch werden. Wir schätzen die Koeffizienten ab: Benutze $i \leq p$, $j \leq q$.

$$\begin{aligned} & \left| \sum_{l=0}^{\min(k,i)} \binom{k}{l} \underbrace{i(i-1) \dots (i-l+1)}_{\leq p!} \underbrace{j^{k-l}}_{\leq q^p} a^i \alpha^{i-l} a^j e^{j\alpha} \right| \\ & \leq \sum_{l=0}^p \binom{p}{l} p! q^p C^{p+q}; \quad C := \max(|a\alpha|, |ae^\alpha|) \\ & = 2^p p! q^p C^{p+q} \text{ wegen } \sum_{k=0}^p \binom{p}{k} = 2^p \end{aligned} \quad (9)$$

Wir verwenden $p \leq \frac{n}{\ln n}$, $q \leq \ln^2 n$, $p! \leq p^p$, $\frac{n}{\ln n} \leq n$ und schätzen (9) weiter ab:

$$\begin{aligned} 2^p q^p p! C^{p+q} & \leq 2^{\frac{n}{\ln n}} (\ln^2 n)^{\frac{n}{\ln n}} \left(\frac{n}{\ln n} \right)^{\frac{n}{\ln n}} C^{p+q} \\ & \leq \underbrace{2^n}_{\leq e^n} (\ln n)^{\frac{2n}{\ln n}} n^{\frac{n}{\ln n}} C^{p+q} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq e^n e^{\frac{2n}{\ln n} \ln(\ln n)} e^{\ln n \frac{n}{\ln n}} e^{C(\ln^2 n + \frac{n}{\ln n})} \\
&\leq e^{2n} e^{2n \ln(\ln n)} e^{C(\ln^2 n + \frac{n}{\ln n})} \\
&= e^{2n \ln(\ln n) + 2n + C(\ln^2 n + \frac{n}{\ln n})}
\end{aligned} \tag{10}$$

Nun betrachte die Ungleichung

$$2 + C \left(\frac{\ln^2 n}{n} + \frac{1}{\ln n} \right) \leq \ln(\ln n) \tag{11}$$

Die linke Seite ist monoton fallend, die rechte Seite (wenn auch extrem langsam) wachsend. Daher ist für genügend große n die Ungleichung erfüllt. Wir formen (11) um und erhalten für hinreichend große n

$$2n + C \left(\ln^2 n + \frac{n}{\ln n} \right) \leq n \ln(\ln n) \tag{12}$$

Wir setzen (12) in den Exponenten in (10) ein und erhalten als Abschätzung für (9):

$$e^{3n \ln(\ln n)} \tag{13}$$

(Wieder für n genügend groß). Nach Lemma 2 gibt es eine ganzzahlige Lösung von (6), (7) mit

$$0 < |a_{ij}| \leq (2Mn \ln n e^{3n \ln \ln n})^{\frac{2dn}{n \ln n - 2dn}} \leq e^n \tag{14}$$

für n genügend groß.

Beachte: Die a_{ij} sind nicht alle Null. Weiterhin ist die e -Funktion transzendent (Lemma 3). Daher ist F_n nicht die Nullfunktion. F_n ist analytisch. Daher

$$\exists k \in \mathbb{N} : F_n^{(k)}(0) \neq 0.$$

Sei $m \in \mathbb{N}$ derart, daß

$$\forall l < m : F_n^{(l)}(0) = F_n^{(l)}(\alpha) = 0 \wedge \left(F_n^{(m)}(0) \neq 0 \vee F_n^{(m)}(\alpha) \neq 0 \right).$$

m ist also die kleinste natürliche Zahl für die F_n an der Stelle 0 oder α einen von Null verschiedenen Wert annimmt. Dieser Wert sei mit β bezeichnet. Beachte:

$$F_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}, F_n^{(m)}(\alpha) \in \mathbb{K}.$$

also ist β in jedem Fall algebraisch höchstens vom Grad d .

Wir definieren eine weitere Hilfsfunktion:

$$G_n(x) := \frac{F_n(x)}{x^m(x-\alpha)^m}.$$

Man beachte: F_n ist holomorph und hat nach Konstruktion an den Stellen 0 und α m -fache Nullstellen. Daher hat G_n in 0 und α hebbare Singularitäten, ist also eine zu einer ganzen Funktion holomorph fortsetzbar. Mit Hilfe von G_n schätzen wir $|\beta|$ ab:

Wir unterscheiden *Fall 1*: $\beta = F_n^{(m)}(0)$ und *Fall 2*: $\beta = F_n^{(m)}(\alpha)$.

Es gilt

$$x^m(x-\alpha)^m G_n(x) = F_n(x).$$

Wir entwickeln F_n um 0 bzw. α in eine Potenzreihe, dabei fallen die ersten m Terme weg, da 0 und α m -fache Nullstellen sind:

$$\text{Fall 1: } F_n(x) = \frac{\beta}{m!} x^m + \sum_{h=m+1}^{\infty} a_h x^h$$

$$\text{Fall 2: } F_n(x) = \frac{\beta}{m!} (x - \alpha)^m + \sum_{h=m+1}^{\infty} a'_h (x - \alpha)^h$$

mit irgendwelchen Koeffizientenfolgen (a_h) bzw. (a'_h) . Für $G_n(x)$ haben wir dann:

$$\text{Fall 1: } G_n(x) = \frac{\beta}{m!} (x - \alpha)^{-m} + \sum_{h=m+1}^{\infty} a_h x^{h-m} (x - \alpha)^{-m}$$

$$\text{Fall 2: } G_n(x) = \frac{\beta}{m!} (x - \alpha)^{-m} + \sum_{h=m+1}^{\infty} a'_h (x - \alpha)^{h-m} (x - \alpha)^{-m}$$

Setzt man nun 0 bzw. α ein, so erhält man:

$$\text{Fall 1: } G_n(0) = \frac{\beta}{m!} (-\alpha)^{-m} \Rightarrow \beta = G_n(0) m! (-\alpha)^m$$

$$\text{Fall 2: } G_n(\alpha) = \frac{\beta}{m!} \alpha^{-m} \Rightarrow \beta = G_n(\alpha) m! \alpha^m$$

Wir dürfen \mathbb{C} annehmen, daß $|\alpha| < \frac{1}{2} m^{\frac{2}{3}}$. Daher gilt nach dem Maximumprinzip für holomorphe Funktionen:

$$|\beta| \leq m! |\alpha|^m \max_{|x|=m^{\frac{2}{3}}} |G_n(x)| \quad (15)$$

Dazu schätzen wir zunächst $|F_n|$ in diesem Bereich ab und verwenden (14):

$$\max_{|x|=m^{\frac{2}{3}}} |F_n(x)| \leq \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q e^n \left(m^{\frac{2}{3}}\right)^i e^{jm^{\frac{2}{3}}}$$

als nächstes verwenden wir $m^{\frac{2}{3}i} \leq m^{\frac{2}{3}p}$, $e^{jm^{\frac{2}{3}}} \leq e^{qm^{\frac{2}{3}}}$, $e^n \leq e^m$, $p \leq \frac{m}{\ln m}$, $q \leq \ln^2 m$ und erhalten

$$\max_{|x|=m^{\frac{2}{3}}} |F_n(x)| \leq \left(\frac{m}{\ln m}\right) \ln^2 m e^m m^{\frac{2}{3} \left(\frac{m}{\ln m}\right)} e^{m^{\frac{2}{3}} (\ln^2 m)}.$$

Wir formen um und benutzen $m \ln m \leq m^2 = e^{2 \ln m}$:

$$\begin{aligned} \max_{|x|=m^{\frac{2}{3}}} |F_n(x)| &\leq e^{2 \ln m} e^m e^{\frac{2}{3} \frac{m}{\ln m} \ln m} e^{m^{\frac{2}{3}} \ln^2 m} \\ &= e^{2 \ln m} e^m e^{\frac{2}{3} m + m^{\frac{2}{3}} \ln^2 m}. \end{aligned} \quad (16)$$

Wird m genügend groß gilt $2 \ln m + \frac{2}{3} m + m^{\frac{2}{3}} \ln^2 m \leq m$ und somit kann (16) für hinreichend große m mit e^{2m} abgeschätzt werden. Beachte:

$$|\alpha| \leq \frac{1}{2} m^{\frac{2}{3}}, |x| = m^{\frac{2}{3}} \Rightarrow x - \alpha \geq m^{\frac{2}{3}} - |\alpha|.$$

Wir erhalten dann für (15):

$$|\beta| \leq |\alpha|^m m! \frac{e^{2m}}{m^{\frac{2}{3}m} (m^{\frac{2}{3}} - |\alpha|)^m} \quad (17)$$

Mit $m! \leq m^m$ und $|\alpha| \leq \frac{1}{2}m^{\frac{2}{3}}$ gilt für hinreichend große m :

$$|\beta| \leq |\alpha|^m 2^m e^{2m} m^{-\frac{1}{3}m} \leq m^{-\frac{m}{6}}. \quad (18)$$

Da die ganz-algebraischen Zahlen einen Ring bilden ist für $x \in \{0, \alpha\}$ die Zahl $a^{p+q} F_n^{(m)}(x)$ in jedem Fall ganz-algebraisch, da dann in der Summenformel (8) nur ganz-algebraische Zahlen vorkommen. Daher gilt

$$\text{den}(\beta) \leq a^{\frac{m}{\ln m} + \ln^2 m}.$$

Nun schätzen wir noch $|\overline{\beta}|$ ab: Wir benutzen folgende Ungleichungen⁶:

$$\forall \gamma, \delta \text{ algebraisch: } \overline{|\gamma + \delta|} \leq \overline{|\gamma|} + \overline{|\delta|}, \overline{|\gamma\delta|} \leq \overline{|\gamma|} \overline{|\delta|}$$

Mit (8) erhalten wir:

$$\overline{|\beta|} \leq \sum_{i=0}^p \sum_{j=0}^q |a_{ij}| \sum_{l=0}^{\min(i,m)} c_{il} |\alpha|^{i-l} |e^\alpha|^j.$$

Dies können wir gemäß (9) mit $e^{3m \ln \ln m}$ abschätzen.

Beachte: $d \geq 2$, daher gilt

$$a^{p+q} \geq \text{den}(\beta) \Rightarrow a^{-d(p+q)} \leq \text{den}(\beta)^{-d}. \quad (19)$$

Ebenso haben wir:

$$e^{3m \ln \ln m} \geq \overline{|\beta|} \Rightarrow e^{(1-d)3m \ln \ln m} \leq \overline{|\beta|}^{1-d}. \quad (20)$$

Nun benutzen wir die Ungleichung aus Lemma 4 und setzen (18), (19) und (20) ein:

$$\begin{aligned} |\beta| &\geq (\overline{|\beta|})^{1-d} (\text{den}(\beta))^{-d} \\ \Rightarrow \ln |\beta| &\geq \ln \left((\overline{|\beta|})^{1-d} (\text{den}(\beta))^{-d} \right) \\ \Rightarrow -\frac{m}{6} \ln m &\geq \ln \left(a^{(p+q)(1-d)} e^{-3md \ln \ln m} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{m}{6} \ln m &\leq \ln a(p+q)(d-1) + 3md \ln \ln m \\ \Rightarrow \frac{m}{6} \ln m &\leq (d-1) \left(\frac{m}{\ln m} + \ln^2 m \right) \ln a + 3md \ln \ln m \end{aligned}$$

Hier sehen wir: die linke Seite wächst im wesentlichen wie $m \ln m$, die rechte Seite hingegen wie $m \ln \ln m$, was viel langsamer ist. Für $m \rightarrow \infty$ führt dies auf einen Widerspruch.

Also können nicht sowohl α als auch e^α algebraisch gewesen sein. \square

Korollar 7 (Transzendenz von e und π) e und π sind transzendent.

Beweis: 1 ist algebraisch, also ist nach Satz 6 $e^1 = e$ transzendent.

Angenommen π sei algebraisch, dann ist auch $i\pi$ algebraisch. Dann ist nach Satz 6 $e^{i\pi} = -1$ transzendent. Widerspruch. Also ist π transzendent. \square

⁶D. Duverney: Théorie des nombres, Théorème 12.2