Mengen und die Kontinuumhypothese

Nicolai Hähnle

3. Mai 2005

Inhaltsverzeichnis

1 Größenvergleiche von Mengen

Wir sind es gewohnt, in unserem Alltag Längen, Gewichte und Volumina zu messen und zu vergleichen. Die Ausgangsfrage dieses Textes ist, ob und wie sich auch die Größe oder *Mächtigkeit* von Mengen bestimmen lässt.

Bei endlichen Mengen zählen wir dazu einfach die Elemente der Menge. Die Tatsache, dass eine Menge M genau n Elemente hat wird auch als $|M| = n$ geschrieben, so ist z.B. $\big|\{a, b, c\}\big| = 3$. Wenn zwei endliche Mengen gleich viele Elemente haben, sind sie gleich groß.

Versucht man, bei unendlichen Mengen die Elemente zu zählen, kommt man natürlich nie zu einem Ende. Wir können aber die Größe von zwei unendlichen Mengen M und N miteinander vergleichen, und zwar über folgende Analogie: Stellen wir uns die Elemente von M als Briefkästen vor. Wenn es uns gelingt, in jeden dieser Briefkästen genau ein Element aus N einzusortieren (wobei natürlich kein Element aus N mehr als einmal einsortiert werden darf), so sind die beiden Mengen gleich groß.

Formell ergibt sich aus dieser Überlegung folgende Definition, die auch bei endlichen Mengen wie erwartet funktioniert:

Definition 1. *Zwei Mengen M und N sind genau dann gleich mächtig, wenn eine bijektive Abbildung von M nach N existiert. Man schreibt dann* $|M| = |N|$.

Aus den grundlegenden Eigenschaften von bijektiven Abbildungen folgt, dass sich die Gleichmächtigkeit von Mengen wie eine Äquivalenzrelation verhält. Alle gleich mächtigen Mengen haben also etwas gemeinsam, und dieses „Etwas" wird die *Kardinalzahl* sein, die wir ihnen in Abschnitt 5 zuordnen werden.

Zunächst benötigen wir eine Möglichkeit, auch verschieden mächtige Mengen zu vergleichen. Ganz analog zu den Überlegungen zur Gleichmächtigkeit kommt man zu folgender Definition, die im Fall von endlichen Mengen unserer intuitiven Vorstellung entspricht:

Definition 2. *Eine Menge M ist genau dann weniger oder gleich mächtig wie eine Menge N, wenn es eine injektive Abbildung von M nach N gibt. Man schreibt dann $|M| \leq |N|$.*

Man kann zeigen, dass sich der so definierte Mächtigkeitsvergleich wie eine Totalordnung verhält. Die Reflexivität ($|M| \leq |M|$) und Transitivität (aus $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |P|$ folgt $|M| \leq |P|$) folgen direkt aus den Gesetzen für Abbildungen. Auf Antisymmetrie (aus $|M| \leq |N|$ und $|N| \leq |M|$ folgt $|M| = |N|$) und Vergleichbarkeit (es gilt immer $|M| \leq |N|$ oder $|N| \leq |M|$) werde ich später noch zurückkommen.

2 Einige abzählbare Mengen

Wenn eine Menge M gleich mächtig wie $\mathbb{N}$ ist, so kann man ihre Elemente nummerieren. Man sagt dann, M ist *abzählbar*. Betrachten wir die natürlichen Zahlen und zwei Teilmengen:

$$\begin{aligned} \mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} \\ A &= \{2, 3, 4, 5, \dots\} \\ G &= \{2, 4, 6, 8, \dots\} \end{aligned}$$

Obwohl A und G Teilmengen von $\mathbb{N}$ sind, sind alle drei Mengen abzählbar und damit gleich mächtig: Indem wir jedem $n \in \mathbb{N}$ den Nachfolger, also $n + 1 \in A$ zuordnen, haben wir eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A gebildet und indem wir jedem $n \in \mathbb{N}$ das Doppelte, also $2n \in G$ zuordnen, haben wir eine Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und G. Teilmengen von unendlichen Mengen können also durchaus genau so mächtig sein wie die Menge selbst.

Für das Verschieben von Elementen in der verwendeten Bijektion zwischen $\mathbb{N}$ und A gibt es das schöne Bild von „Hilberts Hotel": In einem Hotel mit abzählbar unendlich vielen Zimmern sind alle Zimmer belegt, als ein neuer Gast ankommt. „Kein Problem,“ sagt der Neuankömmling und schlägt vor, einfach alle Gäste zu bitten, in das jeweils nächste Zimmer umzuziehen. So wird das erste Zimmer frei für den Neuen.

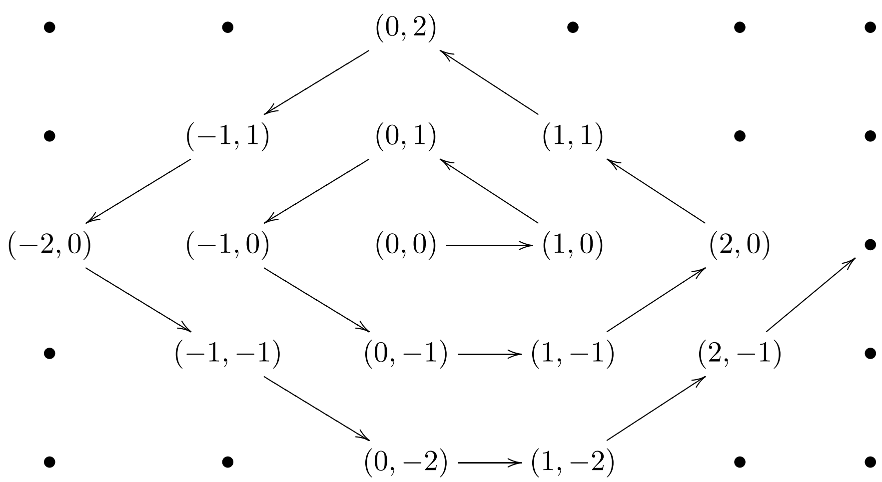
Übrigens können wir mit *jeder* unendlichen Teilmenge T von $\mathbb{N}$ ganz ähnlich argumentieren, zum Beispiel indem wir die Elemente von T der Größe nach ordnen und dann dem kleinsten Element von T die 1 zuordnen, dem zweitkleinsten die 2, und so weiter. Aus dieser Überlegung folgt der

Satz 1. *Jede Teilmenge von* $\mathbb{N}$ *ist entweder endlich oder gleich mächtig wie* $\mathbb{N}$ *selbst.*

Nach diesem Ergebnis stellt sich natürlich die Frage nach Obermengen von $\mathbb{N}$. Auch die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ ist abzählbar wie wir sehen können, indem wir die ganzen Zahlen alternierend ordnen:

$$\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$$

Was ist mit den rationalen Zahlen $\mathbb{Q}$? Betrachten wir dazu zunächst die Produktmenge $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$. Stellen wir uns die Elemente von $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ als Punkte auf einer Ebene vor:



Wir können diese Punkte wie im Bild angedeutet spiralförmig nummerieren und dann anordnen:

$$\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} = \{(0,0), (1,0), (0,1), (-1,0), (0,-1), (1,-1), (2,0), (1,1), \dots\}$$

Also ist $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ abzählbar. Da wir rationale Zahlen als Paare von ganzen Zahlen (Zähler und Nenner) schreiben können lässt sich $\mathbb{Q}$ ganz analog ordnen, indem man „überflüssige“ Paare einfach weglässt. Damit ist auch $\mathbb{Q}$ abzählbar.

3 Cantors Diagonalargument

Wir haben jetzt verschiedene unendliche Mengen gesehen, die sich alle als abzählbar erwiesen haben. Es liegt nahe, als nächstes die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ zu untersuchen. Man stellt fest:

Satz 2. *Die Menge der reellen Zahlen $\mathbb{R}$ ist überabzählbar.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass das Intervall $I := [0, 1[$ überabzählbar ist. Wenn bereits eine Teilmenge von $\mathbb{R}$ überabzählbar ist, so muss auch $\mathbb{R}$ überabzählbar sein (wir wissen aber noch nicht, ob $|I| = |\mathbb{R}|$).

Nehmen wir an, I wäre abzählbar. Dann können wir $I = \{a_1, a_2, a_3, \dots\}$ setzen und alle a_n als Dezimalbrüche in der eindeutigen Schreibweise (ohne eine unendliche Folge von 9en am Ende) in ein Schema schreiben:

$$\begin{aligned} a_1 &= 0, a_{11}a_{12}a_{13}\dots \\ a_2 &= 0, a_{21}a_{22}a_{23}\dots \\ a_3 &= 0, a_{31}a_{32}a_{33}\dots \\ \vdots &\quad \vdots \\ a_n &= 0, a_{n1}a_{n2}a_{n3}\dots \\ \vdots &\quad \vdots \end{aligned}$$

Dann wählen wir für alle k ein $b_k \in \{5, 6\}$ so, dass $b_k \neq a_{kk}$. Setze:

$$b = 0, b_1b_2b_3\dots$$

Durch die Konstruktion der b_n gibt es kein n mit $b = a_n$, da sich b von a_n mindestens an der n-ten Stelle unterscheidet. Andererseits ist $0 \leq b < 1$ und damit $b \in I$. Also muss es ein n mit $a_n = b$ geben. Das ist ein Widerspruch, also ist I überabzählbar. □

Dieser Satz und der verwendete Beweis gehen auf Georg Cantor zurück. Man spricht vom *Diagonalargument*, da die Ziffern auf der Diagonale des Zahlenschemas eine zentrale Rolle spielen. Diese Argumentationsweise werden wir gleich noch einmal verwenden um zu zeigen, dass es keine mächtigste Menge gibt.

Satz 3. *Für jede Menge M ist die Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ echt mächtiger als M.*

Beweis. Die Potenzmenge $\mathscr{P}(M)$ ist mindestens so mächtig wie M selbst, da für alle $x \in M$ gilt, dass $\{x\} \in \mathscr{P}(M)$. Wir müssen also nur die Gleichmächtigkeit ausschießen.

Nehmen wir dazu an, $\mathscr{P}(M)$ wäre gleich mächtig wie M. Dann gibt es eine bijektive Funktion $\varphi : M \to \mathscr{P}(M)$. Wir können uns ein ähnliches

Schema vorstellen wie im letzten Beweis. Hier ein Beispiel:

$$\begin{aligned}
\varphi(\alpha) &= \{\alpha, \beta, \quad \delta, \dots\} \\
\varphi(\beta) &= \{ \qquad\quad \delta, \dots\} \\
\varphi(\gamma) &= \{\alpha, \quad \gamma, \quad \dots\} \\
\varphi(\delta) &= \{\alpha, \beta, \gamma, \quad \dots\} \\
\vdots \quad & \vdots
\end{aligned}$$

Beachte, dass die beteiligten Mengen durchaus überabzählbar sein können. Das Schema soll veranschaulichen, dass in diesem Beispiel unter anderem $\gamma \notin \varphi(\alpha)$ gelten soll.

Wir konstruieren jetzt eine Menge U, indem wir wieder die Diagonale des Schemas betrachten: $U := \{x \in M | x \notin \varphi(x)\}$. Im obigen Beispiel ist also $U = \{\beta, \delta, \dots\}$ und insbesondere $\alpha, \gamma \notin U$.

Aufgrund der Konstruktion von U gilt für alle $x \in M : U \neq \varphi(x)$. Da aber φ eine Bijektion von M nach $\mathscr{P}(M)$ ist und $U \subseteq M$, muss ein $x \in M$ mit $\varphi(x) = U$ existieren. Dies ist ein Widerspruch, der sich durch $\big|\mathscr{P}(M)\big| > |M|$ auflöst. $\square$

4 Ordnungszahlen

Bevor wir noch allgemeinere Aussagen über Mächtigkeit und Kardinalzahlen machen können, benötigen wir ein weiteres Konzept, das auf Georg Cantor zurückgeht.

Definition 3. *Eine Menge M heißt durch eine Relation $<_M$* geordnet*, wenn $<_M$ transitiv ist und für je zwei unterschiedliche Elemente a, b von M entweder $a <_M b$ oder $b <_M a$ gilt.*

Also sind sowohl die natürlichen Zahlen $\mathbb{N}$ als auch die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit dem üblichen Größenvergleich $<$ eine geordnete Menge. Aber auch $\{\dots, 3, 2, 1\}$ und $\{1, 3, 5, \dots, 2, 4, 6, \dots\}$ sind mögliche Ordnungen der natürlichen Zahlen.

Definition 4. *Eine geordnete Menge M heißt* wohlgeordnet*, wenn jede Teilmenge von M ein kleinstes Element hat.*

Die reellen Zahlen sind durch $<$ nicht wohlgeordnet, da es zum Beispiel keine kleinste positive Zahl gibt. Die umgekehrte Ordnung $\{\dots, 3, 2, 1\}$ der natürlichen Zahlen ist ebenfalls keine Wohlordnung. Dafür sind aber alle folgenden Mengen mit der angegebenen Ordnung wohlgeordnet:

$$\begin{aligned}
\mathbb{N} &= \{1, 2, 3, 4, \dots\} \\
G &= \{2, 4, 6, 8, \dots\} \\
N_1 &= \{1, 3, 5, 7, \dots, \ 2, 4, 6, 8, \dots\} \\
N_2 &= \{3, 4, 5, \dots, \ 1, 2\} \\
N_3 &= \{1, \ 2, 4, 6, \dots, \ 3, 9, 15, \dots, \ 5, 25, 35, \dots, \ 7, 49, 77, \dots\}
\end{aligned}$$

Betrachtet man die Mengen $\mathbb{N}$ und G, so stellt man intuitiv fest, dass sich ihre Ordnung ähnelt. Bei beiden gibt es ein erstes Element, und alle anderen Elemente haben einen direkten Vorgänger. Die Ordnungen der Mengen N_1, N_2, und N_3 sehen dagegen nicht ähnlich aus.

Definition 5. *Die Mengen M und N seien wohlgeordnet durch die Relationen $<_M$ bzw. $<_N$. Dann heißen M und N* ähnlich, *wenn es eine bijektive Funktion $\varphi : M \to N$ gibt, unter der die Ordnung erhalten bleibt, d.h. aus $a <_M b$ folgt $\varphi(a) <_N \varphi(b)$. Wir schreiben dann $\|M\| = \|N\|$.*

Wie bei der Gleichmächtigkeit von Mengen stellt man fest, dass Ähnlichkeit die Eigenschaften einer Äquivalenzrelation hat. Wir wollen jetzt ähnlichen Mengen eine repräsentative *Ordnungszahl* zuordnen.

Die mengentheoretische Konstruktion von Ordnungszahlen ist eine Erweiterung der Konstruktion der natürlichen Zahlen mit der Null. Diese sieht wie folgt aus:

$$\begin{aligned}
0 &:= \emptyset \\
1 &:= 0 \cup \{0\} = \{0\} = \{\emptyset\} \\
2 &:= 1 \cup \{1\} = \{0,1\} = \{\emptyset, \{\emptyset\}\} \\
&\vdots \\
n+1 &:= n \cup \{n\} = \{0,1,2,\dots,n\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Auf diese Weise werden unendlich viele natürliche Zahlen konstruiert, aber jede dieser Zahlen ist selbst endlich. Ordnungszahlen erweitern die natürlichen Zahlen um unendliche Zahlen, und zwar wie folgt:

$$\begin{aligned}
\omega &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} n = \{0,1,2,\dots\} \\
\omega + 1 &:= \omega \cup \{\omega\} = \{0,1,2,\dots,\omega\} \\
\omega + 2 &:= \omega + 1 \cup \{\omega + 1\} = \{0,1,2,\dots,\omega,\omega+1\} \\
&\vdots \\
\omega + \omega &:= \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} \omega + n = \{0,1,2,\dots,\omega,\omega+1,\omega+2,\dots\} \\
&\vdots
\end{aligned}$$

Allgemein gilt, dass zu jeder Menge A aus Ordnungszahlen auch die Vereinigungsmenge $\bigcup_{\alpha \in A} \alpha$ eine Ordnungszahl ist.

Wir wollen diese Konstruktion von Ordnungszahlen nutzen, um die Relation $<$ für Ordnungszahlen zu definieren:

Definition 6. *Eine Ordnungszahl μ ist genau dann kleiner als eine Ordnungszahl ν wenn gilt: $\mu \in \nu$.*

Bemerkung. Ich hoffe, die nachfolgenden Sätze sind intuitiv nachvollziehbar. Eine detailliertere Entwicklung und Beweise findet man in [2], insbesondere Kapitel 8 und 9.

Satz 4. *Für Ordnungszahlen μ und ν gilt: $\mu < \nu \iff \mu \subset \nu$.*

Satz 5. *Seien μ und ν zwei Ordnungszahlen. Dann gilt genau eine der folgenden Aussagen: $\mu < \nu$, $\mu = \nu$, $\mu > \nu$.*

Satz 6 (Ordnung und Mächtigkeit). *Seien μ und ν zwei Ordnungszahlen. Dann gilt:*

1. $\mu < \nu \implies |\mu| \leq |\nu|$.
2. $|\mu| < |\nu| \implies \mu < \nu$.

Bemerkung. In Satz 6 gilt keine Äquivalenz, wie man sich leicht an einem Beispiel verdeutlichen kann: Es gilt $|\omega + 1| \leq |\omega|$, aber $\omega + 1 > \omega$.

Dass Ordnungszahlen auch wirklich für die ursprüngliche Fragestellung interessant sind, erkennt man an folgenden Sätzen:

Satz 7. *Jede Ordnungszahl ist, wenn man ihre Elemente der Größe nach ordnet, wohlgeordnet.*

Satz 8. *Zwei Ordnungszahlen μ und ν sind genau dann ähnlich, wenn $\mu = \nu$.*

Jetzt können wir einfach die zu einer wohlgeordneten Menge ähnliche Ordnungszahl suchen und zuordnen. Wenn wir kurz zu den Beispielmengen am Anfang dieses Abschnitts zurückkehren, finden wir: $\|\mathbb{N}\| = \|G\| = \omega$, $\|N_1\| = \omega + \omega = \omega \cdot 2$, $\|N_2\| = \omega + 2$ und $\|N_3\| = \omega \cdot \omega$. Es bleibt nur noch die Frage, ob man wirklich zu *jeder* wohlgeordneten Menge auch eine ähnliche Ordnungszahl findet.

Satz 9. *Jede wohlgeordnete Menge ist einer Ordnungszahl ähnlich.*

5 Kardinalzahlen

Wir haben bereits an den Beispielordnungen N_1, N_2 und N_3 gesehen, dass Mengen gleicher Mächtigkeit unähnlich sein können. Dafür sind ähnliche Mengen per Definition immer gleich mächtig. Also macht es nicht nur auf Grund der mengentheoretischen Konstruktion Sinn, von der Mächtigkeit $|\alpha|$ einer Ordnungszahl α zu sprechen.

Mit Hilfe des Auswahlaxioms kann man außerdem zeigen:

Satz 10 (Wohlordnungssatz). *Jede Menge kann wohlgeordnet werden.*

Der Wohlordnungssatz liefert zusammen mit Satz 9 zu jeder Menge M eine Ordnungszahl μ für die per Definition gilt: $|\mu| = |M|$. Diese Ordnungszahl ist für unendliche Mengen zunächst nicht eindeutig.

Satz 11. *Zu jeder Menge M gibt es eine eindeutige kleinste Ordnungszahl μ_0 mit $|\mu_0| = |M|$.*

Beweis. Wir wählen zunächst wie oben eine beliebige Ordnungszahl μ mit $|\mu| = |M|$. Sei jetzt $A := \{\alpha < \mu \mid |\alpha| = |M|\} \subseteq \mu$. Wenn A leer ist, so ist μ bereits die kleinste Ordnungszahl mit $|\mu| = |M|$. Andernfalls hat A ein kleinstes Element, da die Menge μ durch $<$ wohlgeordnet ist (Satz 7). Es gibt also in jedem Fall eine kleinste Ordnungszahl μ_0 mit $|\mu_0| = |M|$. □

Die Konstruktion dieser kleinsten Ordnungszahl μ_0 hängt nur von der Mächtigkeit von M ab und nicht davon, aus welchen Elementen M konkret besteht. Also ist μ_0 für alle gleich mächtigen Mengen gleich, und wir können die Ordnungszahl μ_0 auch als *Kardinalzahl* der Menge M verstehen.

Mit Hilfe von Satz 6 sehen wir jetzt auch, dass sich die Eigenschaften der Relation $<$ für Ordnungszahlen auf die Relation $\leq$ für die Mächtigkeit von Mengen übertragen. Der Mächtigkeitsvergleich von Mengen ist also tatsächlich antisymmetrisch, und je zwei Mengen lassen sich immer vergleichen.

Satz 12. *Jede Kardinalzahl hat einen direkten Nachfolger.*

Beweis. Sei $\mathfrak{m}$ eine Kardinalzahl. Wir wollen $\mathfrak{m}$ als Ordnungszahl und damit als Menge mit $|\mathfrak{m}| = \mathfrak{m}$ verstehen. Aus Satz 3 wissen wir, dass $\big|\mathscr{P}(\mathfrak{m})\big| > \mathfrak{m}$. Jetzt gehen wir analog zum Beweis von Satz 11 vor: Zunächst finden wir eine Ordnungszahl $|\pi| = |\mathscr{P}(\mathfrak{m})|$. Dann können wir die kleinste Ordnungszahl ν mit $|\nu| > \mathfrak{m}$ konstruieren, da π wohlgeordnet ist und außerdem $|\pi| > \mathfrak{m}$ gilt. Die so gefundene Ordnungszahl ist, als Kardinalzahl verstanden, der direkte Nachfolger von $\mathfrak{m}$. □

Die Kardinalzahlen von endlichen Mengen sind einfach die natürlichen Zahlen. Für unendliche Mengen führt man eigene Symbole ein: $|\mathbb{N}| = |\omega| = \aleph_0$ („aleph-null“), die nächstgrößere Kardinalzahl ist dann $\aleph_1$, gefolgt von $\aleph_2$, und so weiter. Die Mächtigkeit der reellen Zahlen bezeichnet man üblicherweise mit c (von Kontinuum).

6 Im Kontinuum

Kehren wir voerst zurück zu $\mathbb{R}$ und betrachten Intervalle. Zunächst stellen wir fest, dass die Intervalle $[0, 1]$ und $[0, 1[$ gleich mächtig sind. Dazu wählen wir einfach eine abzählbare Teilmenge von $[0, 1]$, z.B. $\{\frac{1}{n} | n \in \mathbb{N}\}$, und verschieben ihre Elemente wie in Hilberts Hotel. Alle anderen Elemente von $[0, 1]$ bleiben unverändert. Auf diese Weise entsteht eine Bijektion zwischen $[0, 1]$ und $[0, 1[$. Wir können grundsätzlich mit abgeschlossenen und den entsprechenden offenen und halboffenen Intervallen mit gleichen Grenzen ganz analog argumentieren.

Wenn wir Intervalle verschieben, ändert sich natürlich nichts an ihrer Mächtigkeit. Betrachten wir also einmal offene Intervalle der Form $]-a,a[$ mit $a>0$ und die Funktion $f:]-a,a[\to\mathbb{R}$, die durch

$$f(x)=\frac{x}{a-|x|}$$

gegeben ist. Diese Funktion ist bijektiv, also gilt $\big|\,]{-a},a[\,\big|=|\mathbb{R}|=c$.

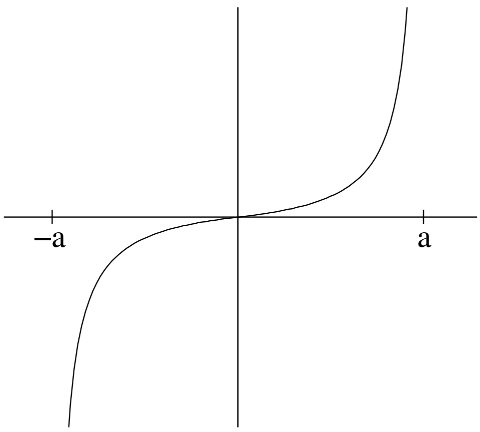


Abbildung 1: Graph von $x\mapsto\frac{x}{a-|x|}$

Sei jetzt I ein einseitig unbeschränktes Intervall. Wir können immer ein beschränktes Teilintervall J finden, also gilt $c=|J|\leq|I|$. Andererseits folgt $c\geq|I|$ aus der Teilmengenbeziehung $I\subseteq\mathbb{R}$. Es gilt also $|I|=c$, und zusammen mit den vorigen Ergebnissen haben wir insgesamt gezeigt:

Satz 13. *Alle echten Intervalle in $\mathbb{R}$ sind gleich mächtig wie $\mathbb{R}$ selbst.*

Eines der überraschendsten Ergebnisse zur Mächtigkeit von Mengen ist der folgende Satz.

Satz 14. *Die Menge $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ ist gleich mächtig wie $\mathbb{R}$ selbst.*

Beweis. Aus Satz 13 wissen wir, dass $\big|[0,1[\,\big|=c$, also genügt es zu zeigen, dass eine bijektive Abbildung von Paaren (x,y) mit $0\leq x,y<1$ auf das Interval $[0,1[$ existiert.

Eine solche Abbildung konstruieren wir wie folgt: Zu einem gegebenem Paar (x,y) schreiben wir x und y als eindeutige Dezimalbrüche ohne eine unendliche Folge von 9en am Ende und gruppieren die Ziffern, indem wir immer bis zur nächsten Ziffer gehen, die nicht 9 ist. Dies illustriert das folgende Beispiel:

$$\begin{array}{rclllll} x & = & 0{,}993 & 0 & 5 & 3 & \ldots \\ y & = & 0{,}2 & 91 & 4 & 9990 & \ldots \end{array}$$

Dann ordnen wir dem Paar eine Zahl $r \in [0,1[$ zu, indem wir abwechselnd Zifferngruppen von x und y aneinanderhängen. Für das obige Beispiel erhalten wir:

$$r = 0,993 \quad 2 \quad 0 \quad 91 \quad 5 \quad 4 \quad 3 \quad 9990 \quad \ldots$$

Da weder x noch y in einer unendlichen Folge von 9en enden, endet auch r nicht in einer unendlichen Folge von 9en. Wenn wir umgekehrt eine Zahl $z \in [0,1[$ als Dezimalbruch ohne unendliche Folge von 9en schreiben, können wir leicht die Zifferngruppen für das zugehörige Paar (x, y) ablesen. Also ist die so konstruierte Abbildung bijektiv. $\square$

Bemerkung. Die Verwendung von Zifferngruppen im Beweis von Satz 14 umgeht ein Problem im Zusammenhang mit der Eindeutigkeit von Dezimalbrüchen. Angenommen, wir würden einfach abwechselnd Ziffern von x und y aneinanderhängen, um r zu konstruieren. Betrachten wir dann zum Beispiel die beiden Dezimalbrüche:

$$\begin{aligned} r_1 &= 0,10909090\ldots \\ r_2 &= 0,20000000\ldots \end{aligned}$$

Wenn wir nun versuchen, aus diesen Dezimalbrüchen Paare abzulesen, so erhalten wir die Paare $(0,199\ldots, 0,000\ldots)$ und $(0,200\ldots, 0,000\ldots)$. Diese beiden Paare sind aber gleich, die verwendete Abbildung ist also keine Bijektion. Die Konstruktion über Zifferngruppen behebt dieses Problem.

7 Cantor-Menge

Bei der Untersuchung von Mengen ist Georg Cantor auf eine faszinierende Menge, die so genannte *Cantor-Menge* C, gestossen. Diese wird wie folgt rekursiv konstruiert: Man beginnt mit dem Intervall $[0,1]$ und subtrahiert das offene Intervall $\left]\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right[$, also sozusagen das mittlere Drittel. Im nächsten Schritt subtrahiert man jeweils das mittlere Drittel der übrig gebliebenen Intervalle, also die Intervalle $\left]\frac{1}{9}, \frac{2}{9}\right[$ und $\left]\frac{7}{9}, \frac{8}{9}\right[$, und so weiter.

Setzt man diesen Prozess ins Unendliche fort, so stellt man bildlich fest, dass „nicht mehr viel übrigbleibt“. Was bedeutet das konkret? Schreiben wir die beteiligten Zahlen in Nachkommadarstellung zur Basis 3, also z.B. $\frac{1}{3} = 0,1000\ldots$, $\frac{1}{2} = 0,1111\ldots$ und $\frac{2}{3} = 0,2000\ldots$. Im ersten Schritt der Konstruktion der Cantor-Menge entfernt man alle Zahlen, die in dieser ternären Schreibweise mit einer 1 an der ersten Nachkommastelle geschrieben werden müssen. Die Zahl $\frac{1}{3}$ kann auch als $0,0222\ldots$ geschrieben werden und wird nicht entfernt. Im zweiten Schritt werden dann alle Zahlen entfernt, die mit einer 1 an der zweiten Nachkommastelle geschrieben werden müssen, und so weiter. Die Cantor-Menge enthält also genau die Zahlen im Intervall $[0,1]$, deren ternäre Darstellung die Ziffer 1 nicht benötigt. Mit dieser Erkenntnis können wir die Aussage, dass in der Cantor-Menge „nicht mehr viel übrigbleibt“ konkretisieren:

Satz 15. *Die Cantor-Menge C enthält kein echtes Intervall.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, dass die Cantor-Menge kein geschlossenes Intervall $[a, b]$ mit $a < b$ enthalten kann. Ferner können wir fordern, dass die Grenzen a und b in der Cantor-Menge enthalten sind, da das Intervall sonst von vornherein keine Teilmenge von C ist.

Seien also $a < b$ beliebige Elemente der Cantor-Menge und schreiben wir a und b in der ternären Schreibweise ohne 1en als

$$\begin{aligned} a &= 0, a_1 a_2 a_3 \dots \\ b &= 0, b_1 b_2 b_3 \dots \end{aligned}$$

Wähle das kleinste k mit $a_k \neq b_k$. Dann gilt wegen $a < b$ auch $0 = a_k < b_k = 2$. Setze nun $c = 0, a_1 a_2 \dots a_{k-1} 1111 \dots$. Es gilt $a < c < b$, und da $c \notin C$, kann das Intervall $[a, b]$ keine Teilmenge der Cantor-Menge sein. □

Satz 16. *Die Cantor-Menge C ist gleich mächtig wie $\mathbb{R}$.*

Beweis. Die Cantor-Menge enthält alle Zahlen aus $[0, 1]$, die in ternärer Schreibweise nur mit den Ziffern 0 und 2 geschrieben werden können. Wenn wir nun in dieser ternären Schreibweise einer Zahl $x \in C$ jede Ziffer 2 durch eine 1 ersetzen, und die resultierende Ziffernfolge als binäre Representätion lesen, erhalten wir eine surjektive Abbildung von C nach $[0, 1]$. Also ist C mindestens so mächtig wie $[0, 1]$, und mit $C \subseteq [0, 1]$ folgt $|C| = |[0, 1]| = |\mathbb{R}|$. □

8 Die Kontinuumhypothese

Wir haben jetzt Mengen der Mächtigkeit $\aleph_0$ und c gesehen, aber keine überabzählbaren Mengen, die weniger mächtig sind als c. Außerdem wissen wir aus Satz 12, dass jede Kardinalzahl einen direkten Nachfolger hat. Es liegt nahe zu vermuten, dass c der direkte Nachfolger von $\aleph_0$ ist, oder anders ausgedrückt:

Kontinuumhypothese. $c = \aleph_1$

David Hilbert hat die Kontinuumhypothese 1900 in seiner Liste von wichtigen ungelösten mathematischen Problemen an die erste Stelle gesetzt. Kurt Gödel und Paul Cohen haben bewiesen, dass die Frage nach der Kontinuumhypothese nicht durch logische Beweisführung beantwortet werden kann: Weder die Kontinuumhypothese noch ihr Gegenteil können mit Hilfe der üblichen mengentheoretischen Axiomen bewiesen werden. Den Beweis für diese erstaunliche Aussage findet man in [3], ich will hier nur die grundlegende Beweisidee mit Hilfe einer kleinen Geschichte etwas erläutern.

Die Bewohner der Insel Arbegla kennen keine Mathematik wie wir, und auch Zahlen verwenden sie nicht oder nur in sehr geringem Maß. Dafür beschäftigen sie sich mit rein symbolischen Gleichungen, wie wir sie aus der Algebra kennen. Für die Manipulation dieser Gleichungen haben sie eine Sammlung von Regeln gefunden, die ihnen intuitiv richtig erscheint, und die wir als die üblichen Körperaxiome (also Kommutativität, Assoziativität, Distributivität und Lösbarkeit gewisser Gleichungen) wiedererkennen würden. Allerdings ist auf Arbegla nicht bekannt, dass es verschiedene Körper gibt. Die Körperaxiome gelten dort als fundamentale Wahrheit, so wie bei uns noch vor 100 Jahren die Axiome der Mengentheorie. Eines Tages stellt ein „Arbeglaiker" die Frage, ob denn jede Gleichung der Form $a_n x^n + \ldots + a_1 x + a_0 = 0$ lösbar sei. Die Bewohner von Arbegla können diese Frage mit Hilfe der ihnen bekannten Regeln nicht beantworten.

Wir können ihnen helfen, denn wir wissen:

Satz 17. *Die algebraische Abgeschlossenheit ist unabhängig von den Körperaxiomen.*

Beweis. Der Satz bedeutet, dass man, wenn man nur die Körperaxiome voraussetzt, die algebraische Abgeschlossenheit weder beweisen noch widerlegen kann. Ich nenne im Folgenden die Menge der Körperaxiome K und die algebraische Abgeschlossenheit A.

Um diesen Satz zu zeigen, konstruieren und untersuchen wir Beispielsysteme die K erfüllen. Jeder Körper ist ein solches Beispielsystem, das man dann auch ein *Modell* von K nennt. Da wir auf Grund der Konstruktion mehr über das Modell wissen als nur die Körperaxiome, können wir auch mehr Aussagen über das Modell beweisen als mit Hilfe von K möglich ist.

1. Wir wollen zunächst zeigen, dass A durch K nicht bewiesen werden kann. Wir zeigen dazu, dass die Aussage $K \to A$, also „Jeder Körper ist algebraisch abgeschlossen" falsch ist. Es genügt, ein Gegenbeispiel zu konstruieren. Wir benötigen also ein Modell für K, in dem A falsch ist. Dazu konstruieren wir die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ mit Hilfe der Mengentheorie und beweisen, dass $\mathbb{R}$ wirklich ein Körper ist und nicht algebraisch abgeschlossen ist.

2. Im zweiten Schritt wird gezeigt, dass die Aussage $K \to \neg A$, also „Kein Körper ist algebraisch abgeschlossen" falsch ist. Auch hier genügt ein Gegenbeispiel wie der Körper der komplexen Zahlen. □

Bemerkung. Im Beweis von Satz 17 wurden Modelle der Körperaxiome verwendet, die innerhalb der Mengentheorie konstruiert sind. Da der Beweis letztendlich eine Art Widerspruchsbeweis ist, muss man hier die Widerspruchsfreiheit der Mengentheorie voraussetzen. Üblicherweise setzt man diese implizit voraus, aber bei Überlegungen wie hier sollte man sich der damit verbundenen logischen Problematik bewußt sein.

Der Beweis der Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese verläuft ganz ähnlich. Da er aber ein Modell der Mengentheorie mit Hilfe der Mengentheorie selbst konstruiert, ist er noch um einiges subtiler.

Es gibt nun prinzipiell drei Möglichkeiten, mit der Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese umzugehen:

1. Man findet sich damit ab, dass manche Fragen unentscheidbar sind.
2. Man akzeptiert die Existenz von verschiedenen Mengentheorien: In manchen Mengentheorien würde $c = \aleph_1$, in anderen dagegen $c > \aleph_1$ gelten.
3. Man entscheidet sich dafür, ein neues Axiom in die Mengentheorie aufzunehmen, durch das die Kontinuumhypothese entschieden wird.

Es gibt zwei bekannte Beispiele für ähnliche Probleme in der Geschichte der Mathematik:

Das Auswahlaxiom (dessen Unabhängigkeit von den anderen Axiomen der Mengentheorie gleichzeitig mit der Unabhängigkeit der Kontinuumhypothese bewiesen wurde) wird inzwischen üblicherweise akzeptiert, da es sich als unerlässlich für viele Beweise herausgestellt hat.

Auch in der Axiomatisierung der Geometrie gibt es ein von den restlichen Axiomen unabhängiges Axiom über parallele Geraden, das zunächst wegen seiner „unschönen Form“ umstritten war. Letztendlich hat dies zur Entwicklung von nicht-euklidischen Geometrien geführt, in denen andere Axiome gelten.

Da die Mengentheorie aber im Gegensatz zur Geometrie heutzutage das Fundament für beinahe alle Zweige der Mathematik ist, würde sich die Existenz von unterschiedlichen Mengentheorien unweigerlich auch auf den Rest der Mathematik auswirken. Daher wäre es wünschenswert, ein intuitiv einleuchtendes Argument für ein neues Axiom in der Standard-Mengentheorie zu finden, durch das die Kontinuumhypothese entschieden werden kann.

Literatur

[1] Martin Aigner, Günter M. Ziegler, *Proofs from the book.* Springer, 1998.

[2] Karel Hrbacek, Thomas Jech, *Introduction to Set Theory.* Marcel Dekker, 1978.

[3] Paul J. Cohen, *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* W. A. Benjamin, 1966.