Proseminararbeit zur Analysis

Approximation durch Kettenbrüche

Fritz Blumentritt
7. Juni 2005

Einleitung

Ein **Kettenbruch** ist ein Ausdruck der Form $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\cfrac{\dots}{\cfrac{1}{a_N}}}}$ bzw. $a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\dots}}$.

Genauer gesagt: Ein (endlicher) Kettenbruch ist eine Funktion, die einer endlichen Folge $a_0, a_1, \dots, a_N$ bzw. unendlichen Folge $a_0, a_1, \dots$ von reellen Zahlen, mit $a_0 \in \mathbb{R}, a_i \in \mathbb{R}_{>0} i \geq 1$, einen Wert zuordnet. Dabei werden die a_i als die **Teilnenner** des Kettenbruches bezeichnet. Als Vereinfachung der Schreibweise definiert man $[a_0, a_1, \dots, a_N] := a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{\dots}{\cfrac{1}{a_N}}}$ bzw.

$[a_0, a_1, \dots] := a_0+\cfrac{1}{a_1+\dots}$ Dabei ist der Wert eines endlichen Kettenbruchs, der ebenfalls mit $[a_0, a_1, \dots, a_N]$ bezeichnet wird, beschrieben durch $[a_N]=a_N \wedge [a_0, a_1, \dots, a_N]=a_0+\cfrac{1}{[a_1, a_2, \dots, a_N]}=[a_0, [a_1, a_2, \dots, a_N]]$. Im Folgenden wird aus dem Kontext immer klar erkennbar sein ob mit $[a_0, a_1, \dots, a_N]$ bzw. $[a_0, a_1, \dots]$ der Kettenbruch oder sein Wert gemeint ist. Mit den unendlichen Kettenbrüchen beschäftige ich mich im Kapitel 2 näher. An dieser Stelle sei daher nur erwähnt, dass ein Kettenbruch durchaus unendlich sein kann. Ein Kettenbruch heißt **einfach**, wenn die $a_i \in \mathbb{N} \, \forall \, i \geq 1$, sowie $a_0 \in \mathbb{Z}$.

Beispiel:

$$[1,2,3,4]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4}}}=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{\cfrac{13}{4}}} 1+\cfrac{1}{2+\cfrac{4}{13}}=1+\cfrac{1}{\cfrac{30}{13}}=1+\frac{13}{30}=\frac{43}{30}$$

In dieser Arbeit werde ich mich hauptsächlich mit den Eigenschaften einfacher Kettenbrüche beschäftigen, auch wenn ich zunächst einen wichtigen Satz für Kettenbrüche mit reellen Teilnennern beweisen werde.
Kapitel 1 wird zeigen, dass sich rationale Zahlen als Kettenbruch darstellen lassen.
In Kapitel 2 werde ich mich mit unendlichen Kettenbrüchen beschäftigen. Dabei werde ich zeigen, dass sich jede irrationale Zahl in eindeutiger Weise durch einen unendlichen Kettenbruch darstellen läßt.
In Kapitel 3 werde die Vorteile der Kettenbruchdarstellung gegenüber anderen Entwicklungen, wie z.B. Dezimalbrüchen aufzeigen und die reellen Zahlen charakterisieren, deren Kettenbruchentwicklung periodisch ist.

Zunächst jedoch der angekündigte wichtige Satz über Kettenbrüche mit reellen Teilnennern.

Satz 1:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen und $a_0 \in \mathbb{R}$.
Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $p_0=a_0 ; p_1=a_1 a_0+1 ; p_n=a_n p_{n-1}+p_{n-2} \quad n \geq 2$.

Die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $q_0=1\,;q_1=a_1\,;q_n=a_n q_{n-1}+q_{n-2}\quad n\geq 2$.

Dann gilt: $[a_0,a_1,\ldots,a_n]=\dfrac{p_n}{q_n}$ **.**

Beweis:

Idee: Vollständige Induktion

Für $\dfrac{p_0}{q_0}$ und $\dfrac{p_1}{q_1}$ ist die Behauptung klar. Sei die Behauptung nun richtig für Kettenbrüche, mit n Teilnennern, also $[a_0,a_1,\ldots,a_n]=\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{a_n p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+q_{n-2}}$ für beliebiege $a_n\in\mathbb{R}_{>0}$.

Dann ist aber $[a_0,a_1,\ldots,a_n,a_{n+1}]=[a_0,a_1,\ldots,a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}]=\dfrac{\left(a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)p_{n-1}+p_{n-2}}{\left(a_n+\dfrac{1}{a_{n+1}}\right)q_{n-1}+q_{n-2}}$

$$=\frac{a_n p_{n-1}+\dfrac{p_{n-1}}{a_{n+1}}+p_{n-2}}{a_n q_{n-1}+\dfrac{q_{n-1}}{a_{n+1}}+q_{n-2}}=\frac{a_{n+1}(a_n p_{n-1}+p_{n-2})+p_{n-1}}{a_{n+1}(a_n q_{n-1}+q_{n-2})+q_{n-1}}=\frac{a_{n+1}p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}q_n+q_{n-1}}=\frac{p_{n+1}}{q_{n+1}}\,.$$

Die Behauptung ist damit per Induktion bewiesen. q.e.d

$[a_0,a_1,\ldots,a_n]$ heißt der n \`te **Näherungsbruch** von $[a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots,a_N]$.

Im Laufe dieses Proseminars werden die Folgen (p_n) und (q_n) immer wieder benötigt werden. Wenn daher im folgenden von (p_n) und (q_n) die Rede ist, sind damit immer die oben definierten Folgen gemeint.

Lemma 2:
Die Folgen (p_n) und (q_n) erfüllen für $n\geq 1$ die Gleichungen
i) $p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}$ **,**
ii) $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_n}$ **.**

Beweis:

Idee: Vollständige Induktion

i) Es gilt $p_1 q_0-p_0 q_1=a_1 a_0+1-a_0 a_1=1=(-1)^0$.
Sei nun für ein festes $n\geq 1$ die Gleichung $p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}$ richtig.
Dann ist $p_{n+1}q_n-p_n q_{n+1}=(a_{n+1}p_n+p_{n-1})q_n-p_n(a_{n+1}q_n+q_{n-1})=p_{n-1}q_n-p_n q_{n-1}$
$=-(p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n)=-(-1)^{n-1}=(-1)^n$.

ii) Folgt direkt aus i) q.e.d

Kapitel 1: Die Darstellung rationaler Zahlen durch endliche Kettenbrüche

Wie aus Satz 1 zu erkennen ist, stellt jeder einfache endliche Kettenbruch eine rationale Zahl dar. Ziel dieses Kapitels ist es zu zeigen, dass umgekehrt auch jede rationale Zahl durch einen einfachen endlichen Kettenbruch dargestellt werden kann. Dabei kann man aber sofort anmerken, dass die Darstellung einer rationalen Zahl als einfacher endlicher Kettenbruch nicht eindeutig ist. Denn es gilt: $[a_0, a_1, \dots, a_n] = [a_0, a_1, \dots, a_n - 1, 1]$, wenn $a_n \neq 1$.

Im ersten Beispiel ist $[1,2,3,4] = \frac{43}{30} = [1,2,3,3,1]$.

Allerdings wird sich in Satz 5 zeigen, dass dies auch die einzige mögliche Variation ist.

Man bezeichnet $a_n' := [a_n, a_{n+1}, \dots, a_N]$ als den n-ten **vollständigen Quotienten** des Kettenbruches $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, a_N]$.

Korollar 3:
Sei $x \in \mathbb{R}$ durch den Kettenbruch $[a_0, a_1, \dots, a_N]$ dargestellt. Dann gilt:
$x = \frac{a_n' p_{n-1} + p_{n-2}}{a_n' q_{n-1} + q_{n-2}}$ **für alle n, für die die vorkommenden Größen definiert sind.**

Beweis: Folgt aus Definition und Satz 1. q.e.d

Lemma 4:
Es sei $[a_0, a_1, \dots, a_n, \dots, a_N]$ ein einfacher Kettenbruch.
i) Wenn $a_N \neq 1$, dann ist $\forall 0 \leq n \leq N : a_n = \lfloor a_n' \rfloor$.
ii) Wenn $a_N = 1$, dann ist $\forall 0 \leq n \leq N-2 : a_n = \lfloor a_n' \rfloor$ und $a_{N-1} = \lfloor a_{N-1}' \rfloor - 1 = a_{N-1}' - 1$.

Beweis:
Idee: Benütze die Definitionen um die Ungleichung $a_n < a_n' < a_n + 1$ zu zeigen.

i) Für $N = 0$ ist die Behauptung trivial. Daher betrachte ich den Fall $N > 0$. Dann gilt
$a_n' = a_n + \frac{1}{a_{n+1}'}$ für $0 \leq n \leq N-1$ Es ist aber $a_{n+1}' > 1$ und daher $a_n < a_n' < a_n + 1$.
Daraus folgt die Behauptung.
ii) Für $n \leq N-2$ geht der Beweis vollkommen analog zu i). Für a_{N-1} gilt aber:
$a_{N-1}' = a_{N-1} + \frac{1}{a_N} = a_{N-1} + 1$.
Daraus folgt die Behauptung q.e.d

Die Kettenbrüche $[a_0, a_1, \dots, a_N]$ und $[b_0, b_1, \dots, b_N]$ heißen **identisch**, wenn $\forall 0 \leq n \leq N : a_n = b_n$.

Satz 5:
Stellen zwei einfache Kettenbrüche $[a_0, a_1, \dots, a_N]$ und $[b_0, b_1, \dots, b_M]$ dieselbe Zahl x dar, und ist $a_N > 1 \wedge b_M > 1$, dann ist $N = M$ und die Kettenbrüche sind identisch.

Beweis:
Idee: Benütze Lemma 2, Korollar 3, Lemma 4 und Vollständige Induktion.

Nach Lemma 4 ist $a_0 = \lfloor x \rfloor = b_0$. Damit ist $a_0 + \frac{1}{a_1'} = x = a_0 + \frac{1}{b_1'}$ und damit $a_1' = b_1'$ und nach Lemma 4 $a_1 = b_1$. Seien nun die ersten n Teilnenner der Kettenbrüche gleich für ein festes $n \geq 2$. Dann ist $x = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, a_n'] = [a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_n']$ und damit nach Korollar 3

$$\frac{a_n' p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n' q_{n-1}+q_{n-2}}=x=\frac{b_n' p_{n-1}+p_{n-2}}{b_n' q_{n-1}+q_{n-2}}.$$

Also folgt: $(a_n'-b_n')(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=0$.

Nach Lemma 2 ist aber $p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1}=(-1)^n\neq 0$ und damit $a_n'=b_n'$. Wieder nach Lemma 4 ist deshalb $a_n=b_n$.

Damit ist automatisch $N=M$. Wäre nämlich z.B. $N>M$, hätte man $0=[a_{M+1},\ldots,a_N]$, also $a_{M+1}=0$, was im Widerspruch zu den Definitionen steht. q.e.d

Bemerkung 6: Der „Kettenbruchalgorithmus“

Es sei $x\in\mathbb{R}$ beliebig gewählt und $a_0=\lfloor x\rfloor$. Dann gibt es ein $\xi_0\in[0,1[$ mit $x=a_0+\xi_0$.

Wenn $\xi_0\neq 0$, dann setze man $a_1'=\frac{1}{\xi_0}$ und $a_1=\lfloor a_1'\rfloor$.

Dann gibt es wiederum ein $\xi_1\in[0,1[$ mit $a_1'=a_1+\xi_1$.

Wenn $\xi_1\neq 0$,dann setze man $a_2'=\frac{1}{\xi_1}$ und $a_1=\lfloor a_1'\rfloor$.

Dieser Algorithmus wird als **Kettenbruchalgorithmus** bezeichnet. Er lässt sich fortsetzen, solange $\xi_n\neq 0$. Gibt es jedoch ein $N\in\mathbb{N}$ mit $\xi_N=0$ bricht der Algorithmus ab und es ist $x=a_0+\frac{1}{a_1'}=[a_0,a_1']=[a_0,a_1,a_2']=\ldots=[a_0,a_1,\ldots,a_N]$, wobei $a_0\in\mathbb{Z}$ und $\forall\, n\in\mathbb{N}: a_n\in\mathbb{N}$ Dann ist *x* rational und wird durch einen einfachen Kettenbruch dargestellt.

Satz 7:
Jede rationale Zahl kann durch einen einfachen endlichen Kettenbruch dargestellt werden.

Beweis:
Idee: Wende den Kettenbruchalgorithmus an.
Sei $x\in\mathbb{Q}$ eine beliebige rationale Zahl. Wenn $x\in\mathbb{Z}$, ist die Behauptung trivial. Wenn $x\notin\mathbb{Z}$, dann gibt es $h, k_0\in\mathbb{Z}, k_0>1$, mit $x=\frac{h}{k_0}$ vollständig gekürzt. Definiere wie im Kettenbruchalgorithmus

$a_0=\lfloor x\rfloor, \xi_0=x-\lfloor x\rfloor$

.

$$\Rightarrow\frac{h}{k_0}=a_0+\xi_0\Rightarrow h=a_0k_0+\xi_0k_0$$

Wähle nun $k_1:=\xi_0k_0$. Damit ist wegen $h=a_0k_0+\xi_0k_0$ und $h, a_0\in\mathbb{Z}, k_0\in\mathbb{N}$ klar, dass $k_1\in\mathbb{N}$.

Der Kettenbruchalgorithmus liefert also, wenn $\xi_0\neq 0$ nun ein $a_1':=\frac{1}{\xi_0}=\frac{k_0}{k_1}$ und damit

$a_1\in\mathbb{N}, \xi_1\in[0,1[$ mit $\frac{k_0}{k_1}=a_1+\xi_1$.

Führt man den Kettenbruchalgorithmus weiter fort, erhält man die Gleichungskette

$$x=\frac{h}{k_0}=a_0+\frac{k_1}{k_0}=a_0+\frac{1}{0+\frac{k_0}{k_1}}=a_0+\frac{1}{a_1+\frac{k_2}{k_1}}=\ldots$$

Man beachte hierbei, daß für jedes $n\geq 1$ gilt: $k_n:=\xi_{n-1}k_{n-1}$. Wegen $0\leq\xi_n<1$ folgt daraus die Ungleichung $k_n<k_{n-1}$.

Weil aber immer $k_n\in\mathbb{N}$ gibt es ein $N\in\mathbb{N}$ mit $k_{N+1}=0$ und damit $\xi_N=0$,womit der Kettenbruchalgorithmus nach endlich vielen Schritten abbricht und es gilt $x=[a_0,a_1,\ldots,a_N]$. q.e.d

Kapitel 2: Konvergenz unendlicher einfacher Kettenbrüche

Nach Kapitel 1 kann man sich jetzt fragen, welchen Sinn Kettenbrüche überhaupt machen, da man rationale Zahlen doch viel einfacher als echten Bruch zweier ganzer Zahlen schreiben kann. Daher betrachte ich nun die Frage, ob man auch irrationale Zahlen durch Kettenbrüche darstellen kann, und wie sich unendliche Kettenbrüche verhalten. Dieses Kapitel wird zeigen, dass unendliche einfache Kettenbrüche tatsächlich sinnvolle Konstruktionen sind, da sich irrationale Zahlen durch deren Näherungsbrüche approximieren lassen. Dazu werde ich mich öfters auf die in der Einleitung beschriebenen Folgen $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beziehen.

Beispiel:

$$\sqrt{2}=1+\sqrt{2}-1=1+\frac{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{\sqrt{2}+1}=1+\frac{1}{2+\sqrt{2}-1}=1+\frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}+1}}=[1,2,2,...]$$

Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{N}$ und $a_0\in\mathbb{Z}$. Dann ist $\forall n\in\mathbb{N}: x_n:=[a_0, a_1, ..., a_n]$ eine rationale Zahl, die durch einen einfachen Kettenbruch dargestellt wird. Wenn die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für $n\to\infty$ gegen einen Wert $x\in\mathbb{R}$ konvergiert, sagt man, dass der unendliche einfache Kettenbruch $[a_0, a_1, a_2, ...]$ gegen x konvergiert und schreibt $x=[a_0, a_1, a_2, ...]$. In diesem Fall sagt man, x ist der **Wert** des Kettenbruches $[a_0, a_1, a_2, ...]$ oder x wird durch den Kettenbruch $[a_0, a_1, a_2, ...]$ dargestellt. Um zu zeigen, daß alle unendlichen einfachen Kettenbrüche konvergieren, benötige ich zunächst einige Aussagen über die Folge der Näherungsbrüche $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}=\left(\frac{p_n}{q_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$.

Lemma 8:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Näherungsbrüche eines einfachen Kettenbruches. Dann ist die Teilfolge $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ der geraden Näherungsbrüche streng monoton wachsend, und die Teilfolge $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ der ungeraden Näherungsbrüche streng monoton fallend.

Beweis:

Idee: Bestimme $sign\left(\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}\right)$ *mit Lemma 2.*

Aus den Definitionen und Lemma 2 folgt:

$$p_n q_{n-2}-p_{n-2}q_n=(a_n p_{n-1}+p_{n-2})q_{n-2}-p_{n-2}(a_n q_{n-1}+q_{n-2})=a_n(p_{n-1}q_{n-2}-p_{n-2}q_{n-1})=a_n(-1)^n$$

Also ist:

$$\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{a_n(-1)^n}{q_{n-2}q_n}.$$

Weil aber die q_n und die a_n für jedes $n\in\mathbb{N}$ positiv sind, ist $\frac{p_n}{q_n}-\frac{p_{n-2}}{q_{n-2}}=\frac{a_n(-1)^n}{q_{n-2}q_n}$ positiv für gerade $n\in\mathbb{N}$ und negativ für ungerade $n\in\mathbb{N}$. Daraus folgt die Behauptung. q.e.d

Lemma 9:
Jeder ungerade Näherungsbruch ist größer als jeder gerade.

Beweis:

Idee: Führe die Annahme, die Behauptung sei falsch, mit Lemma 8 auf einen Widerspruch.

Angenommen, die Behauptung wäre falsch, dann gibt es $m, \mu \in \mathbb{N}$ mit $x_{2m+1} \leq x_{2\mu}$. O.B.d.A gilt, daß $m > \mu$. Dann sagt Lemma 8, daß auch $x_{2m+1} \leq x_{2m}$, also $x_{2m} - x_{2m+1} \geq 0$.

Aus Lemma 2 folgt aber, dass $x_{2m} - x_{2m+1} = \dfrac{(-1)^{2m-1}}{q_{2m+1} q_{2m}} < 0$.

Dieser Wiederspruch zeigt Lemma 9. q.e.d

Satz 10:
Jeder einfache unendliche Kettenbruch konvergiert gegen eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$.

Beweis:

Idee: Schätze $\left| \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} - \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \right|$ *mit Lemma 2 ab und zeige dann, daß* $\left(\dfrac{p_n}{q_n} \right)$ *konvergiert.*

Zunächst sieht man aus der Definition von $(q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sofort, daß $\forall\, n \in \mathbb{N}\; q_n \geq n$.

Es ist nach Lemma 2 $\left| \dfrac{p_{2n}}{q_{2n}} - \dfrac{p_{2n-1}}{q_{2n-1}} \right| = \left| \dfrac{(-1)^{2n-1}}{q_{2n} q_{2n-1}} \right| \leq \dfrac{1}{2n(2n-1)} < \dfrac{1}{n}$.

Mit Lemma 8 und Lemma 9 erhält man daraus, dass $\left(\dfrac{p_n}{q_n} \right)$ eine Cauchyfolge ist und damit gegen eine Zahl $x \in \mathbb{R}$ konvergiert. Wäre x rational, dann würde sie nach Satz 7 durch einen endlichen einfachen Kettenbruch dargestellt werden. Also ist x irrational. q.e.d

Bemerkung 11:
Der Kettenbruchalgorithmus aus Bemerkung 6 kann auch auf jede irrationale Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ angewendet werden. In diesem Fall bricht aber der Kettenbruchalgorithmus niemals ab und es entsteht ein unendlicher einfacher Kettenbruch der gegen x konvergiert.
Es ist nur noch zu zeigen, dass der mit dem Kettenbruchalgorithmus aus einer Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ entwickelte Kettenbruch auch wirklich gegen x konvergiert.
Der Kettenbruchalgorithmus führt auf die Gleichung $x = [a_0, a_1, \ldots, a_n, a_{n+1}{}']$ mit passend gewählten Teilnennern. Dies ist ein endlicher Kettenbruch, und nach Korollar 3 gilt damit:

$$x = \frac{a_{n+1}{}' p_n + p_{n-1}}{a_{n+1}{}' q_n + q_{n-1}},$$

und damit $\left| x - \dfrac{p_n}{q_n} \right| = \left| - \dfrac{p_n q_{n-1} - p_{n-1} q_n}{q_n (a_{n+1}{}' q_n + q_{n-1})} \right| = \dfrac{1}{q_n (a_{n+1}{}' q_n + q_{n-1})} < \dfrac{1}{q_n^2}$

Analog zu den endlichen einfachen Kettenbrüchen nennt man $a_n{}' = [a_n, a_{n+1}, \ldots]$ den n-ten **vollständigen Quotienten** des unendlichen Kettenbruches $x = [a_0, a_1, \ldots]$.

Korollar 12:
Wird eine irrationale Zahl $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ durch einen unendlichen einfachen Kettenbruch dargestellt, so ist diese Darstellung eindeutig.

Beweis:
Sei $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ durch den unendlichen einfachen Kettenbruch $[a_0, a_1, \ldots]$ dargestellt. Dann ist $x = a_0{}' = a_0 + \dfrac{1}{a_1{}'}$ und $a_n{}' = a_n + \dfrac{1}{a_{n+1}{}'}$ für $n \in \mathbb{N}$.

Weil aber für alle $n\in\mathbb{N}$ gilt, daß $a_{n+1}'=a_{n+1}+\frac{1}{a_{n+2}'}>a_{n+1}>0$, ist $1>\frac{1}{a_{n+1}'}>0$. Daraus folgt aber, dass $a_0=\lfloor x\rfloor$ und $\forall n\in\mathbb{N}: a_n=\lfloor a_n'\rfloor$.
Damit sind a_0 und a_1' durch $x=a_0'$ eindeutig bestimmt, sowie a_n und a_{n+1}' durch a_n' eindeutig bestimmt. Durch eine einfache Induktion erhält man jetzt, dass alle Teilnenner eindeutig bestimmt sind. q.e.d

Aus Bemerkung 11 und Korollar 12 erhält man nun:

Satz 13:
Jede irrationale Zahl kann auf genau eine Art als unendlicher einfacher Kettenbruch dargestellt werden.

Beweis:
Nach Bemerkung 11 kann jede irrationale Zahl $x\in\mathbb{R}$ durch einen Kettenbruchdargestellt werden, der gegen x konvergiert. Nach Korollar 12 ist diese Darstellung eindeutig. q.e.d

Als Zusammenfassung von Kapitel 1 und 2 erhält man nun:
Satz 14:
Jede rationale Zahl kann auf genau zwei Arten als endlicher einfacher Kettenbruch dargestellt werden. Jede irrationale Zahl kann in eindeutiger Weise als unendlicher einfacher Kettenbruch dargestellt werden. q.e.d

Kapitel 3: Periodische einfache Kettenbrüche und das Gesetz der besten Näherung

Betrachtet man das Beispiel am Anfang von Kapitel 2, so stellt man fest, daß sich offenbar einige Zahlen als Kettenbruch mit sich wiederholenden Zahlenfolgen darstellen lassen. Dieses Kapitel wird zeigen, welche Arten von Zahlen diese Eigenschaft haben.

Ein unendlicher Kettenbruch mit einer sich wiederholenden Zahlenfolge wird **periodischer** Kettenbruch genannt. Genauer gesagt: Ein unendlicher Kettenbruch $[a_0, a_1, \ldots]$ heißt genau dann periodisch, wenn es $k, L\in\mathbb{N}$ gibt, mit $\forall l\geq L: a_l=a_{l+k}$.
Die Zahlenfolge $a_L, a_{L+1}, \ldots, a_{L+k-1}$ wird als **Periode** des Kettenbruches bezeichnet. Den Kettenbruch schreibt man auch so: $[a_0, a_1, \ldots, a_{L-1}, \overline{a_L, \ldots, a_{L+k-1}}]$.

Lemma 15:
Konvergiert ein einfacher Kettenbruch gegen einen Wert $x\in\mathbb{R}$, dann gilt für jedes $n>1$:
i) $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$,
ii) $\exists\lambda\in]-1,1[$ **mit** $x-\frac{p_n}{q_n}=\frac{\lambda}{q_n^2}$.

Beweis:
Idee: Benütze Lemma 2 und die Definitionen für $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *und* $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

i) Es gilt $x=\frac{a_{n+1}'p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}'q_n+q_{n-1}}$

und damit $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|=\left|-\frac{p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n}{q_n(a_{n+1}'q_n+q_{n-1})}\right|=\frac{1}{q_n(a_{n+1}'q_n+q_{n-1})}<\frac{1}{q_n^2}$

ii) Folgt direkt aus i). q.e.d

Satz 16:
Eine irrationale Zahl x lässt sich genau dann als periodischer Kettenbruch schreiben, wenn x die Lösung einer Gleichung der Form $ay^2+by+c=0$ mit $a,b,c\in\mathbb{Z}, a\neq 0$ ist.

Beweis:
Idee:
i)Betrachte die letzten Näherungsbrüche der Periode.
ii)Führe die Gleichung $ay^2+by+c=0$ auf $A_n a_n'^2+B_n a_n'+C_n=0$. Zeige dann, dass $(A_n),(B_n),(C_n)$ beschränkte Folgen sind und finde so konstante Teilfolgen $(A_{r_n}),(B_{r_n}),(C_{r_n})$, was dann auf $a_{r_1}=a_{r_2}; a_{r_1+1}=a_{r_2+1}; \ldots$ führt.

Sei x durch einen periodischen Kettenbruch mit der Periode $a_L, a_{L+1},\ldots,a_{L+k-1}$ darstellbar. Dann ist a_L' der L 'te vollständige Quotient des Kettenbruchs und
$a_L'=[a_L,a_{L+1},\ldots,a_{L+k-1},a_L,a_{L+1},\ldots]=[a_L,a_{L+1},\ldots,a_{L+k-1},a_L']$. O.B.d.A gelte $k\geq 2$.
Wählt man nun $\frac{p'}{q'}$ und $\frac{p''}{q''}$ als die beiden letzten Näherungsbrüche von
$[a_L,a_{L+1},\ldots,a_{L+k-1},a_L']$, also $\frac{p'}{q'}=[a_L,a_{L+1},\ldots,a_{L+k-2}]$ und $\frac{p''}{q''}=[a_L,a_{L+1},\ldots,a_{L+k-1}]$, dann ist $a_L'=\frac{p'a_L'+p''}{q'a_L'+q''}$, bzw.
$q'a_L'^2+(q''-p')a_L'-p''=0$.
Außerdem:
$x=\frac{a_L'p_{L-1}+p_{L-2}}{a_L'q_{L-1}+q_{L-2}}\Leftrightarrow x a_L'q_{L-1}+x q_{L-2}=a_L'p_{L-1}+p_{L-2}\Leftrightarrow x a_L'p_{L-1}-a_L'q_{L-1}=p_{L-2}-x q_{L-2}$
$\Leftrightarrow a_L'=\frac{p_{L-2}-q_{L-2}x}{q_{L-1}x-p_{L-1}}$.
Setzt man dieses in die obige Gleichung ein, erhält man
$\frac{(p_{L-2}-q_{L-2}x)^2}{(q_{L-1}x-p_{L-1})^2}q'+(q''-p')\frac{p_{L-2}-q_{L-2}x}{q_{L-1}x-p_{L-1}}-p''=0$
dann ist $(p_{L-2}-q_{L-2}x)^2 q'+(q''-p')(p_{L-2}-q_{L-2}x)*(q_{L-1}x-p_{L-1})-p''(q_{L-1}x-p_{L-1})^2=0$
Also $\exists a,b,c\in\mathbb{Z}$ mit $ax^2+bx+c=0$

Sei nun x eine Lösung einer Gleichung der Form $ay^2+by+c=0$ mit $a,b,c\in\mathbb{Z}, a\neq 0$
Wenn x irrational ist und $x=[a_0,a_1,\ldots,a_n,\ldots]=\frac{p_{n-1}a_n'+p_{n-2}}{q_{n-1}a_n'+q_{n-2}}$, dann erhält man durch Einsetzen:
$A_n a_n'^2+B_n a_n'+C_n=0$ mit
$A_n=a p_{n-1}^2+b p_{n-1}q_{n-1}+c q_{n-1}^2$,
$B_n=2a p_{n-1}p_{n-2}+b(p_{n-1}q_{n-2}+p_{n-2}q_{n-1})+2c q_{n-1}q_{n-2}$,
$C_n=a p_{n-2}^2+b p_{n-2}q_{n-2}+c q_{n-2}^2$.

Nun einige Rechnungen zu diesen Folgen:

Nach Lemma 15 gibt es für jedes $n>1$ ein $\lambda\in]-1,1[$ mit $x-\frac{p_n}{q_n}=\frac{\lambda}{q_n^2}$. Daher kann man p_n schreiben als: $p_n=x\,q_n+\frac{\lambda_n}{q_n}$.

Damit ist $|A_{n+1}|=\left|a\left(x\,q_n+\frac{\lambda_n}{q_n}\right)^2+b\,q_n\left(x\,q_n+\frac{\lambda_n}{q_n}\right)+c\,q_n^2\right|$

$=\left|(ax^2+bx+c)\,q_n^2+2\,ax\,\lambda_n+a\frac{\lambda_n^2}{q_n^2}+b\,\lambda_n\right|=\left|2\,ax\,\lambda_n+a\frac{\lambda_n^2}{q_n^2}+b\,\lambda_n\right|<2|ax|+|a|+|b|$.

Weiter ist wegen $C_{n+1}=A_n$ auch $|C_{n+1}|<2|ax|+|a|+|b|$ für $n>2$.

Außerdem:

$B_{n+1}^2=$

$4\,a^2\,p_n^2\,p_{n-1}^2+4\,ab\,p_n^2\,p_{n-1}\,q_{n-1}+4\,ab\,p_n\,p_{n-1}^2\,q_n+8\,ac\,p_n\,p_{n-1}\,q_n\,q_{n-1}$
$+b^2\,p_n^2q_{n-1}^2+2\,b^2\,p_n\,p_{n-1}\,q_n\,q_{n-1}+b^2\,p_{n-1}^2\,q_n^2+4\,bc\,p_n\,q_n\,q_{n-1}^2+4\,bc\,p_{n-1}\,q_n^2\,q_{n-1}+4\,c^2\,q_n^2\,q_{n-1}^2$

und

$4\,A_{n+1}\,C_{n+1}=$

$4\,a^2\,p_n^2\,p_{n-1}^2+4\,ab\,p_n^2\,p_{n-1}\,q_{n-1}+4\,ac\,p_n^2q_{n-1}^2+4\,ab\,p_n\,p_{n-1}^2\,q_n+4\,b^2\,p_n\,p_{n-1}\,q_n\,q_{n-1}$
$+4\,bc\,p_n\,q_n\,q_{n-1}^2+4\,ac\,p_{n-1}^2\,q_{n-1}^2+4\,bc\,p_{n-1}\,q_n^2\,q_{n-1}+4\,c^2\,q_n^2\,q_{n-1}^2$.

Damit hat man:

$B_{n+1}^2-4\,A_{n+1}\,C_{n+1}=$
$b^2\,p_n^2\,q_{n-1}^2-2\,b^2\,p_n\,p_{n-1}\,q_n\,q_{n-1}+b^2\,p_{n-1}^2-4\,ac\,p_n^2q_{n-1}^2+8\,ac\,p_n\,p_{n-1}\,q_n\,q_{n-1}-4\,c^2\,q_n^2\,q_{n-1}^2=$
$(b^2-4\,ac)(p_n\,q_{n-1}-p_{n-1}\,q_n)^2=b^2-4\,ac$.

Damit ist:

$B_{n+1}^2=b^2-4\,ac+4\,A_{n+1}\,C_{n+1}\leq|b^2-4\,ac|+|4\,A_{n+1}\,C_{n+1}|<|b^2-4\,ac|+4(2|ax|+|a|+|b|)^2$.

$(A_n),(B_n),(C_n)$ sind damit beschränkte Folgen, haben also jeweils eine konvergente Teilfolge. Weil $(A_n),(B_n),(C_n)$ aber Folgen in $\mathbb{Z}$ sind, gibt es auch eine streng monoton wachsende Folge $(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{N}$,für die die Teilfolgen $(A_{r_n}),(B_{r_n}),(C_{r_n})$ konstant sind. Dann gilt aber:

$A_{r_1}a_{r_1}'^2+B_{r_1}a_{r_1}'+C_{r_1}=A_{r_2}a_{r_2}'^2+B_{r_2}a_{r_2}'+C_{r_2}=A_{r_3}a_{r_3}'^2+B_{r_3}a_{r_3}'+C_{r_3}=0$
$\Rightarrow A_{r_1}a_{r_1}'^2+B_{r_1}a_{r_1}'+C_{r_1}=A_{r_1}a_{r_2}'^2+B_{r_1}a_{r_2}'+C_{r_1}=A_{r_1}a_{r_3}'^2+B_{r_1}a_{r_3}'+C_{r_1}=0$

Weil eine quadratische Gleichung aber höchstens zwei unterschiedliche Lösungen haben kann, müssen zwei der a_{r_n}' gleich sein. O.B.d.A. gelte $a_{r_1}'=a_{r_2}'$.

Dann ist nach Korollar 11 aber $a_{r_1}=a_{r_2};\, a_{r_1+1}=a_{r_2+1};\ldots$ und der Kettenbruch damit periodisch.

q.e.d

Es sei $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl. Ein Bruch $\frac{A}{B}$ mit $A\in\mathbb{Z},B\in\mathbb{N}$ heißt **beste Näherung** von x, wenn jeder andere Bruch $\frac{A'}{B'}$ mit $\left|x-\frac{A'}{B'}\right|<\left|x-\frac{A}{B}\right|$ einen größeren Nenner hat.

Lemma 17:

Konvergiert ein einfacher Kettenbruch gegen einen Wert $x\in\mathbb{R}$, dann gilt für jedes $n\geq 1$:

i) $|q_n x-p_n|<|q_{n-1}x-p_{n-1}|$ **,**

ii) $sign(q_n x-p_n)\neq sign(q_{n-1}x-p_{n-1})$ **.**

Beweis:

Idee: Benütze Korollar 3 und Lemma 9 um die Gleichung $a_{n+1}'=-\frac{q_{n-1}x-p_{n-1}}{q_n x-p_n}$ *zu erhalten und folgere daraus die Behauptungen.*

Aus $x=\frac{a_{n+1}'p_n+p_{n-1}}{a_{n+1}'q_n+q_{n-1}}$ aus Korollar 3 erhält man $a_{n+1}'(q_n x-p_n)=-(q_{n-1}x-p_{n-1})$.

Wäre nun $(q_n x-p_n)=0$, dann wäre damit auch $x-\frac{p_n}{q_n}=0$, aber dann wäre x durch einen endlichen Kettenbruch dargestellt und damit rational. Daher kann man aus $a_{n+1}'(q_n x-p_n)=-(q_{n-1}x-p_{n-1})$ die Gleichung $a_{n+1}'=-\frac{q_{n-1}x-p_{n-1}}{q_n x-p_n}$ erhalten. Weil aber $a_{n+1}'>1$, folgen daraus beide Behauptungen. q.e.d

Satz 18: „Gesetz der besten Näherung“
Sei $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl und durch den Kettenbruch $[a_0,a_1,...]$ dargestellt. Dann ist jeder Näherungsbruch $[a_0,a_1,...,a_n]=\frac{p_n}{q_n}$ für $n\geq 1$ eine beste Näherung von x .

Beweis:
Idee: Zeige zunächst die Ungleichung $|Qx-P|\geq|q_{n-1}x-p_{n-1}|>|q_n x-p_n|$ *, und führe damit die Annahme, die Behauptung sei falsch, auf einen Widerspruch.*

Sei $\frac{p_n}{q_n}$ ein beliebiger Näherungsbruch und $\frac{P}{Q}$ ein von $\frac{p_n}{q_n}$ verschiedener Bruch mit $P\in\mathbb{Z}, Q\in\mathbb{N}, Q\leq q_n$.

Nun betrachte ich die Gleichungen $M\,p_n+N\,p_{n-1}=P$ und $M\,q_n+N\,q_{n-1}=Q$
Zunächst ist zu zeigen, dass es überhaupt $M\,,N\in\mathbb{R}$ gibt, die beide Gleichungen erfüllen.
Dazu zeige ich, dass die Matrix $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1}\end{pmatrix}$ den Rang 2 hat. Das folgt aber aus Lemma 2 ii), denn:
Angenommen, die Zeilenvektoren der Matrix $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} \\ q_n & q_{n-1}\end{pmatrix}$ wären linear abhängig, dann gibt es ein $r\in\mathbb{R}$ mit $r\,p_n=q_n \wedge r\,p_{n-1}=q_{n-1}\Leftrightarrow\frac{p_n}{q_n}=\frac{1}{r}=\frac{p_{n-1}}{q_{n-1}}$ was im Widerspruch zu Lemma 2 ii) steht.

Durch elementare Zeilenumformung erhält man aus der Matrix $\begin{pmatrix} p_n & p_{n-1} & P \\ q_n & q_{n-1} & Q\end{pmatrix}$, die Matritzen
$\begin{pmatrix} p_n q_n & p_{n-1}q_n & P\,q_n \\ 0 & p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n & Q\,p_n-P\,q_n\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n & 0 & P\,q_{n-1}-Q\,p_{n-1} \\ q_n p_{n-1} & q_{n-1}p_{n-1} & Q\,p_{n-1}\end{pmatrix}$.
Weil nach Lemma 2 aber $p_n q_{n-1}-p_{n-1}q_n=\pm 1$, erhält man daraus
$\begin{pmatrix} p_n q_n & p_{n-1}q_n & P\,q_n \\ 0 & \pm 1 & Q\,p_n-P\,q_n\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} \pm 1 & 0 & P\,q_{n-1}-Q\,p_{n-1} \\ q_n p_{n-1} & q_{n-1}p_{n-1} & Q\,p_{n-1}\end{pmatrix}$.
Also sind $M=\pm(P\,q_{n-1}-Q\,p_{n-1})\in\mathbb{Z}$ und $N=\pm(Q\,p_n-P\,q_n)\in\mathbb{Z}$.

Wäre nun $N=0$, dann erhält man $\frac{P}{Q}=\frac{Mp_n}{Mq_n}=\frac{p_n}{q_n}$. Da aber $\frac{P}{Q}$ von $\frac{p_n}{q_n}$ verschieden sein soll, ist $N\neq 0$.

Wenn $N>0$, dann folgt aus $M\,q_n+N\,q_{n-1}=Q$ und, $0<Q<q_n$ dass $M\leq 0$.
Wenn $N<0$, dann folgt aus $M\,q_n+N\,q_{n-1}=Q$ und, $0<Q<q_n$ dass $M\geq 0$.

Nun führen die Gleichungen $M\,p_n+N\,p_{n-1}=P$ und $M\,q_n+N\,q_{n-1}=Q$ auf die Gleichung $Qx-P=M(q_n x-p_n)+N(q_{n-1}x-p_{n-1})$.
Mit $sign(M)\neq sign(N)$ aus obiger Überlegung, sowie $sign(q_n x-p_n)\neq sign(q_{n-1}x-p_{n-1})$ aus Lemma 17 ii), hat man jetzt:
$M(q_n x-p_n)\leq 0\geq N(q_{n-1}x-p_{n-1})\vee M(q_n x-p_n)\geq 0\leq N(q_{n-1}x-p_{n-1})$.

Daher gilt: $|Qx-P|=|M(q_n x-p_n)|+|N(q_{n-1}x-p_{n-1})|$ und dann, wegen $N\in\mathbb{Z}\setminus\{0\}$ auch $|Qx-P|\geq|(q_{n-1}x-p_{n-1})|$ und mit Lemma 17 i) auch $|Qx-P|>|(q_n x-p_n)|$

Nun nehme ich an, es sei $\frac{p_n}{q_n}$ keine beste Näherung. D.h. Es gibt einen von $\frac{p_n}{q_n}$ verschiedenen Bruch $\frac{P}{Q}$ mit $\left|x-\frac{P}{Q}\right|\leq\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|$ und $0<Q\leq q_n$

Dann erhält man aber $Q\left|x-\frac{P}{Q}\right|\leq q_n\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|$ und damit $|Qx-P|\leq|x\,q_n-p_n|$, was im Widerspruch zu obiger Überlegung steht. q.e.d

Zusammenfassung

- $[a_N]=a_N \;\wedge\; [a_0,a_1,\dots,a_N]=a_0+\dfrac{1}{[a_1,a_2,\dots,a_N]}=[a_0,[a_1,a_2,\dots,a_N]]$
- Ein Kettenbruch heißt **einfach**, wenn die $a_i\in\mathbb{N}\,\forall\, i\geq 1$, sowie $a_0\in\mathbb{Z}$.
- $[a_{0,}a_1,\dots,a_n]$ heißt der n`te Näherungsbruch von $[a_{0,}a_1,\dots,a_n,\dots,a_N]$.
- Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $p_0=a_0\,;\,p_1=a_1a_0+1\,;\,p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}\quad n\geq 2$.
- Die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $q_0=1\,;\,q_1=a_1\,;\,q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\quad n\geq 2$.
- Man bezeichnet $a_n':=[a_n,a_{n+1},\dots,a_N]$ als den n -ten vollständigen Quotienten des Kettenbruches $[a_{0,}a_1,\dots,a_n,\dots,a_N]$.
- Die Kettenbrüche $[a_0,a_1,\dots,a_N]$ und $[b_0,b_1,\dots,b_N]$ heißen **identisch**, wenn $\forall\, 0\leq n\leq N: a_n=b_n$.
- Es sei $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl. Ein Bruch $\dfrac{A}{B}$ mit $A\in\mathbb{Z}, B\in\mathbb{N}$ heißt **beste Näherung** von x , wenn jeder andere Bruch $\dfrac{A'}{B'}$ mit $\left|x-\dfrac{A'}{B'}\right|<\left|x-\dfrac{A}{B}\right|$ einen größeren Nenner hat.

Satz 1:
Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von positiven reellen Zahlen und $a_0\in\mathbb{R}$.
Die Folge $(p_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $p_0=a_0\,;\,p_1=a_1a_0+1\,;\,p_n=a_np_{n-1}+p_{n-2}\quad n\geq 2$.
Die Folge $(q_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ sei definiert durch $q_0=1\,;\,q_1=a1\,;\,q_n=a_nq_{n-1}+q_{n-2}\quad n\geq 2$.
Dann gilt: $[a_0,a_1,\dots,a_n]=\dfrac{p_n}{q_n}$.

Lemma 2:
Die Folgen (p_n) und (q_n) erfüllen für $n\geq 1$ die Gleichungen
i) $p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}$ **,**
ii) $\dfrac{p_n}{q_n}-\dfrac{p_{n-1}}{q_{n-1}}=\dfrac{(-1)^{n-1}}{q_{n-1}q_n}$ **.**

Korollar 3:
Sei $x\in\mathbb{R}$ durch den Kettenbruch $[a_0,a_1,\dots,a_N]$ dargestellt. Dann gilt:
$x=\dfrac{a_n'p_{n-1}+p_{n-2}}{a_n'q_{n-1}+q_{n-2}}$ **für alle n , für die die vorkommenden Größen definiert sind.**

Lemma 4:Es sei $[a_0,a_1,\dots,a_n,\dots,a_N]$ ein einfacher Kettenbruch.
i) Wenn $a_N\neq 1$, dann ist $\forall\, 0\leq n\leq N: a_n=\lfloor a_n'\rfloor$.
ii) Wenn $a_N=1$, dann ist $\forall\, 0\leq n\leq N-2: a_n=\lfloor a_n'\rfloor$ und $a_{N-1}=\lfloor a_{N-1}'\rfloor-1=a_{N-1}'-1$.

Satz 5:
Stellen zwei einfache Kettenbrüche $[a_0,a_1,\dots,a_N]$ und $[b_0,b_1,\dots,b_M]$ dieselbe Zahl x dar, und ist $a_N>1\wedge b_M>1$, dann ist $N=M$ und die Kettenbrüche sind identisch.

Satz 7:
Jede rationale Zahl kann durch einen einfachen endlichen Kettenbruch dargestellt werden.

Lemma 8:
Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge der Näherungsbrüche eines einfachen Kettenbruches. Dann ist die Teilfolge $(x_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ der geraden Näherungsbrüche streng monoton wachsend, und die Teilfolge $(x_{2n+1})_{n\in\mathbb{N}}$ der ungeraden Näherungsbrüche streng monoton fallend.

Lemma 9:
Jeder ungerade Näherungsbruch ist größer als jeder gerade.

Satz 10:
Jeder einfache unendliche Kettenbruch konvergiert gegen eine irrationale Zahl $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$.

Bemerkung 11:
Der Kettenbruchalgorithmus aus Bemerkung 6 kann auch auf jede irrationale Zahl $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ angewendet werden. In diesem Fall bricht aber der Kettenbruchalgorithmus niemals ab und es entsteht ein unendlicher einfacher Kettenbruch der gegen x konvergiert.

Korollar 12:
Wird eine irrationale Zahl $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ durch einen unendlichen einfachen Kettenbruch dargestellt, so ist diese Darstellung eindeutig.

Satz 13:
Jede irrationale Zahl kann auf genau eine Art als unendlicher einfacher Kettenbruch dargestellt werden.

Satz 14:
Jede rationale Zahl kann auf genau zwei Arten als endlicher einfacher Kettenbruch dargestellt werden. Jede irrationale Zahl kann in eindeutiger Weise als unendlicher einfacher Kettenbruch dargestellt werden.

Lemma 15:
Konvergiert ein einfacher Kettenbruch gegen einen Wert $x\in\mathbb{R}$, dann gilt für jedes $n>1$:
i) $\left|x-\frac{p_n}{q_n}\right|<\frac{1}{q_n^2}$ **,**
ii) $\exists\lambda\in]-1,1[$ **mit** $x-\frac{p_n}{q_n}=\frac{\lambda}{q_n^2}$ **.**

Satz 16:
Eine irrationale Zahl x lässt sich genau dann als periodischer Kettenbruch schreiben, wenn x die Lösung einer Gleichung der Form $ay^2+by+c=0$ mit $a, b, c\in\mathbb{Z}, a\neq 0$ ist.

Lemma 17:
Konvergiert ein einfacher Kettenbruch gegen einen Wert $x\in\mathbb{R}$, dann gilt für jedes $n\geq 1$:
i) $|q_n x-p_n|<|q_{n-1}x-p_{n-1}|$ **.**
ii) $sign(q_n x-p_n)\neq sign(q_{n-1}x-p_{n-1})$ **.**

Satz 18: „Gesetz der besten Näherung“
Sei $x\in\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ eine irrationale Zahl und durch den Kettenbruch $[a_0, a_1, ...]$ dargestellt. Dann ist jeder Näherungsbruch $[a_0, a_1, ..., a_n]=\left(\frac{p_n}{q_n}\right)$ für $n\geq 1$ eine Beste Näherung von x .