Übungsaufgaben zur
"Stochastik für Informatiker "
3. Serie

---

1. Ein Briefmarkenhändler bietet 22 seltene Briefmarken zum Verkauf an. Darunter sind 18 Originale. Ein Kunde wählt zufällig eine Marke aus, befragt aber, bevor er sie kauft, einen Experten um Rat. Dieser gibt im Mittel bei 19 von 20 Briefmarken ein richtiges Urteil ab, unabhängig davon, ob die vorgelegte Briefmarke ein Original oder eine Fälschung ist. Wenn der Experte entscheidet, dass die Briefmarke eine Fälschung ist, gibt der Kunde sie zurück und wählt eine andere. Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist diese dann ein Original ?

(3 Punkte)

---

2. Wir erinnern an das "Wühltisch"-Beispiel aus der Vorlesung:

Auf einem Wühltisch liegen 10 blaue, 20 orange und 40 rote T-Shirts. Herstellerangaben zufolge sind erfahrungsgemäß 1% der blauen, 1,5% der orangenfarbenen und 1% der roten T-Shirts fehlerhaft. Eine Kundin entnimmt – im Trubel des Sommerschlußverkaufs – dem Wühltisch aufs Geratewohl ein T-Shirt.

Geben Sie einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, der dieses "Experiment" trägt, in expliziter Form an. Beantworten Sie weiterhin nachfolgende Fragen:

a) Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit x dafür, daß es sich um ein fehlerfreies Stück in der Farbe Rot oder Orange handelt?

b) Die Kundin ruft ihrer Freundin zu, das T-Shirt sei nicht blau. Mit welcher Wahrscheinlichkeit y hat es einen Fehler?

c) Nun läßt sie weiterhin wissen, daß das T-Shirt obendrein fehlerfrei sei. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, daß es rot ist?

Hinweis: *Überlegen Sie zunächst, welche Ereignisse die Sigma-Algebra $\mathcal{F}$ mindestens enthalten sollte. Schließen Sie daraus, daß sich alle nichtleeren Ereignisse als Vereinigung gewisser "Grundbausteine" (genauer: unzerlegbarer Ereignisse) darstellen lassen. Es genügt dann, diese Grundbausteine und deren Wahrscheinlichkeiten anzugeben. (Wir nennen ein Ereignis $A \in \mathcal{F}$* unzerlegbar, *wenn für alle $\emptyset \neq B \in \mathcal{F}$ gilt $A \cap B = A$).*

(12 Punkte)

---

3. Eine Nachrichtenquelle Q sendet eine der Zahlen 1,...,6 in digital verschlüsselter Form an einen Empfänger E. Zur Verschlüsselung werde ein vierstelliger Binärcode eingesetzt, der jede dieser Zahlen durch ein aus zwei Einsen und zwei Nullen bestehendes Binärwort ersetzt. Infolge von Übertragungsstörungen können die zu übertragenden Bits – jedes für sich - mit einer Wahrscheinlichkeit $p \in (0, 1)$ in ihr Komplement verfälscht werden. (Dabei kann angenommen werden, daß die auf die einzelnen Bits wirkenden Störungen sich nicht gegenseitig beeinflussen.) Wenn das empfangene Wort nicht genau zwei Einsen enthält, wird es als fehlerhaft erkannt, andernfalls als richtig interpretiert.

(a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird ein gesendetes Wort verfälscht?

(b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird eine aufgetretene Verfälschung erkannt?

(c) Mit welcher Wahrscheinlichkeit ist ein für richtig gehaltenes Wort falsch?

(6 Punkte)

---

b.w.

(*)-Aufgabe:

4. (a) Es sei $(A_n), n \in \mathbb{N}$, eine unendliche Folge von Ereignissen aus einer $\sigma-$Algebra $\mathcal{E}$ in Ω. Man betrachte die Ereignisse

$$A_* := \cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m \geq n} A_m, A^* := \cap_{n=1}^{\infty} \cup_{m \geq n} A_m$$

und zeige $A_* \subset A^*$.

(b) Unter der Annahme, daß für eine gedachte unendliche Serie von Würfen mit einem idealen Würfel A_n das Ergebnis "im n-ten Wurf fällt eine 6" bezeichnet, interpretiere man A_* und A^*.

(8 Punkte)

Abgabe: bis 14.11.03 13:00 Uhr **Besprechung: ab 17.11.03**

Briefkästen für die Abgabe auf dem D1-Flur:
- Kasten 12 (Kutyniok/Lotz/Wagner)
- Kasten 7 (Dreker)
- Kasten 128 (Nickel)