Übungsaufgaben zur "Stochastik für Informatiker"

5. Serie

---

1. *Geschlechterkonstellationen*

   Von einem Elternpaar sei bekannt, daß es n (≥ 1) Kinder hat. Man interessiert sich nun für die folgenden Ereignisse:

   $A :\hat{=}$ unter den n Kindern sind beide Geschlechter vertreten
   $B :\hat{=}$ unter den n Kindern befindet sich höchstens ein Mädchen
   $W_i :\hat{=}$ das (i.S. der Geburtsreihenfolge) i-te Kind ist ein Mädchen ($i = 1, \ldots, n$).

   Dabei kann angenommen werden, daß alle möglichen Geschlechterkonstellationen gleichwahrscheinlich sind.

   Untersuchen Sie, ob

   (i) die Ereignisse A und B unabhängig
   (ii) die Ereignisse $W_1, \ldots, W_n$ vollständig unabhängig sind.

   (5 Punkte)

---

2. *Skatspiel(Unabhängigkeit)*

   Aus einem Skatspiel (32 Karten) wird eine Karte gezogen, und wir betrachten die folgenden Ereignisse:

   A. "Es wird eine Sieben oder ein Herz Bild gezogen" (Die Karten Bube, Dame, König und As sind Bilder)
   B. "Es wird ein Bube gezogen"
   C. "Es wird eine Herzkarte gezogen"

   Man untersuche, ob

   (a) A und B,
   (b) A und C,
   (c) B und C,
   (d) A, B und C

   unabhängige Ereignisse sind. (4 Punkte)

Hinweis: *Die Lösung dieser Aufgabe wird besonders einfach, wenn man die Aussagen aus der folgenden Aufgabe 4 benutzt (auch ohne diese zu beweisen)!*

3. *Weitere Aussagen über Unabhaengigkeit*

Untersuchen Sie, welche Teilaussagen der nachfolgenden Behauptung richtig sind.
(Zutreffendes ankreuzen **und** Begründung (Beweis oder Gegenbeispiel) beifügen!)

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B, C \in \mathcal{F}$. Dann gilt

(i) A, B und C paarweise $\perp\!\!\!\perp \quad \wedge \quad A \perp\!\!\!\perp B \backslash C \implies A, B, C$ (vollständig) $\perp\!\!\!\perp$

R	F	?

(ii) $A \perp\!\!\!\perp B \quad \wedge \quad B \backslash C \perp\!\!\!\perp A \quad \wedge \quad B \cap C \perp\!\!\!\perp A \implies A \perp\!\!\!\perp C$

R	F	?

(iii) Sind A, B, C (vollständig) unabhängig, können $A \cap B$ und $B \cap C$ nicht unabhängig sein.

R	F	?

(iv) $A \perp\!\!\!\perp B \quad \wedge \quad C \backslash B \perp\!\!\!\perp A \quad \wedge \quad B \cap C \perp\!\!\!\perp A \implies A \perp\!\!\!\perp C$

R	F	?

(8 Punkte)

(*)-Aufgabe:

4. *Unabhängigkeit der Komplemente*

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathcal{F}, \emptyset \neq I \subset N$ und $(A_i)_{i \in I} \subset \mathcal{F}$.
Zeigen Sie:

(i) $A \perp\!\!\!\perp B \iff A \perp\!\!\!\perp \bar{B} \iff \bar{A} \perp\!\!\!\perp \bar{B} \iff \bar{A} \perp\!\!\!\perp B$

(ii) Für jede beliebige Teilmenge $J \subset I$ bezeichne

$$A_i^J := \begin{cases} \bar{A}_i & \text{i} \in J \\ A_i & \text{i} \notin J \end{cases}$$

Dann gilt:

$$(A_i)_{i \in I} \perp\!\!\!\perp \iff (A_i^J)_{i \in I} \perp\!\!\!\perp$$

(6 Punkte)

Abgabe: bis 2.12.02 16.00 Uhr **Besprechung: ab 3.12.02**