Miniklausur zur "Stochastik für Informatiker" A

13.01.2003

---

1. **(2 x 3 Punkte)**

Aus eine Urne, die anfänglich $R = 10$ rote und $W = 10$ weiße Kugeln enthält, wird eine Kugel gezogen. Ist diese rot, wird sie zusammen mit zwei weiteren roten Kugeln zurückgelegt; ist sie weiß, wird sie zusammen mit zwei weiteren weißen Kugeln zurückgelegt. Anschließend wird eine weitere Kugel gezogen und nach demselben Muster wieder zurückgelegt. Schließlich wird noch eine dritte Kugel gezogen.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p werden nur weiße Kugeln gezogen ?

$\frac{5}{21}$	$\frac{7}{44}$	$\frac{5}{48}$	$\frac{2}{55}$	$\frac{7}{22}$	$\frac{2}{11}$	$\frac{3}{55}$	$\frac{3}{24}$	?

(ii) Sie erfahren, dass die zweite und dritte gezogene Kugel weiß waren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit war die erste rot?

$\frac{7}{11}$	$\frac{2}{3}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{13}{22}$	$\frac{7}{12}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{1}{2}$	$\frac{13}{44}$	?

Lösung: **Bezeichnungen:**
R_i: die i-te gezogene Kugel ist rot
W_i: die i-te gezogene Kugel ist weiß
W: die Anzahl der weißen Kugeln zu Beginn
R: die Anzahl der roten Kugeln zu Beginn
$U := W + R$

(i)
$$\begin{aligned} p &:= P(W_1 \cap W_2 \cap W_3) \\ &= P(W_3 \mid W_2 \cap W_1)\, P(W_2 \mid W_1)\, P(W_1) \\ &= \frac{W+4}{U+4} \cdot \frac{W+2}{U+2} \cdot \frac{W}{U} \\ &= \frac{7}{44} \end{aligned}$$

(ii) Mit $P(R_1 \cap W_2 \cap W_3) = \frac{W+2}{U+4} \cdot \frac{W}{U+2} \cdot \frac{R}{U}$ (analog zu (i) ermittelt) folgt für die gesuchte Wahrscheinlichkeit:

$$\begin{aligned} q &= P(R_1 \mid W_2 \cap W_3) \\ &= \frac{P(R_1 \cap W_2 \cap W_3)}{P(W_1 \cap W_2 \cap W_3) + P(R_1 \cap W_2 \cap W_3)} \\ &= \frac{(W+2)\, W\, R}{(W+2)\, W\, R \,+\, (W+4)\,(W+2)\, W} \\ &= \frac{R}{U+4} \\ &= \frac{5}{12} \end{aligned}$$

---

2. **(2 x 3 Punkte)**

Untersuchen Sie, welche Teilaussagen der nachfolgenden Behauptung richtig sind.
(Zutreffendes ankreuzen **und** *Begründung (Beweis oder Gegenbeispiel) beifügen!)*

Es seien $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $C, D, E \in \mathcal{F}$. Dann gilt

(i) $C \perp\!\!\!\perp E \quad \wedge \quad D \perp\!\!\!\perp E \quad \wedge \quad C \cap D = \emptyset \implies C \cup D \perp\!\!\!\perp E$

R	F	?

(ii) C, D und E paarweise unabhängig $\quad \wedge \quad C \backslash E \perp\!\!\!\perp D \implies C, D, E$ (vollständig) $\perp\!\!\!\perp$

R	F	?

Lösung:

(i) z.z.: $P((C \cup D) \cap E) = P(C \cup D)\, P(E)$

Nun gilt

$$
\begin{aligned}
P((C \cup D) \cap E) &= P((C \cap E) \cup (D \cap E)) \\
&= P(C \cap E) + P(D \cap E) - \underbrace{P(C \cap E \cap D)}_{=0, \text{ da } C \cap D = \emptyset} \\
&= P(C)P(E) + P(D)P(E) && \text{wegen } C \perp\!\!\!\perp E \text{ und } D \perp\!\!\!\perp E \\
&= (P(C) + P(D))\, P(E) \\
&= P(C \cup D)\, P(E) && \text{da } C \cap D = \emptyset
\end{aligned}
$$

(ii) z.z.: $P(D \cap E \cap C) = P(D)\, P(E)\, P(C)$

Vorbemerkung: Es gilt
$$
\begin{aligned}
P((C \backslash E) \cap D) &= P((C \cap D) \backslash (E \cap D)) \\
&= P(C \cap D) - P(E \cap D \cap C)
\end{aligned}
$$

Somit

$$
\begin{aligned}
P(D \cap E \cap C) &= P(D \cap C) - P((C \backslash E) \cap D) \\
&= P(D)\, P(C) - P(C \backslash E)\, P(D) && \text{wegen } D \perp\!\!\!\perp C \text{ und } C \backslash E \perp\!\!\!\perp D \\
&= P(D)\, (P(C) - P(C \backslash E)) \\
&= P(D)\, P(C \cap E) = P(D)\, P(E)\, P(C) && \text{wegen } C \perp\!\!\!\perp E
\end{aligned}
$$
