# Serie 2.1

1. *einfache Rechnungen*
   Gegeben sind die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 7 & 6 & 0 \\ 5 & -10 & 1 \\ -3 & -10 & -4 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} -8 & -1 & 2 \\ 3 & -1 & 8 \\ 4 & -5 & -2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 5 & 7 & -7 \\ 4 & -8 & 8 \\ 7 & 8 & 3 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie

   a) $A + B - C$ b) $(A - B)^T + 5C^T$

   c) $\frac{1}{3}A^T + \frac{1}{2}B^T - \frac{1}{5}C^T$ d) $-\left(2A - 3(A^T - 4B)^T\right)^T - 4(B^T - A)^T$

   **Hinweis:** Man vereinfache die Ausdrücke zunächst, wenn möglich, um Rechenaufwand zu sparen.

---

2. *Produkte (Ecorsys)*

   Gegeben seien die folgenden Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} -4 & 9 & -5 \\ 5 & 7 & 11 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 12 & -3 & 6 \\ -5 & 8 & 2 \end{pmatrix}.$$

   Berechnen Sie die folgenden Produkte, soweit existent.

   a) $CA$ b) $AC$ c) $AB$
   d) $BA$ e) $CB$ f) $B \cdot (A - C)$

---

3. *Kommutativgesetz*

   Welche Werte müssen $x$ und $y$ annehmen, damit für die nachfolgenden Matrizen $A$ und $B$ gilt:

$$AB = BA$$

$$A = \begin{pmatrix} 7 & x \\ 3 & 9 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} y & 6 \\ 6 & 2 \end{pmatrix} \quad .$$

---

**Abgabetermin:** bis 04.05.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 11.05.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**

**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**

**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.2

1. *Matrizenausdrücke*
Gegeben seien die Matrizen

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 2 \\ -4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 7 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Stellen Sie fest, ob folgende Ausdrücke existieren:
a) $A\,(B - C^T)$ b) $AB^T$ c) $(BC)^{-1}$
d) $A(B^T - C^TC)$ e) $DC - A$ f) $((AD)^T)^{-1}D^TA^TB$.
Wenn ja, berechnen Sie diese. Wenn nein, erläutern Sie, warum der Ausdruck nicht existiert.

---

2. *"Forschungsaufgabe" Inverse*
Es sei die Matrix $A = \begin{bmatrix} 2 & x \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ gegeben.

a) Für welche Werte von $x \in I\!R$ besitzt $A$ eine Inverse, für welche nicht?
b) Bestimmen Sie die Inverse (in Abhängigkeit von $x$), soweit diese existiert.

---

3. *Formataufgabe*
Von drei Matrizen $A_{(m,n)}$, $B_{(p,q)}$ und $C_{(r,s)}$ sei folgendes bekannt:

(i) das Produkt $ACB$ kann gebildet werden und besitzt die Inverse $(ACB)^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$,
(ii) die Produktmatrix $A^TC^T$ existiert ebenfalls und besitzt 36 Elemente.

Bestimmen Sie die Formatkennzahlen $m$, $n$, $p$, $q$, $r$ und $s \in I\!N$.

---

**Abgabetermin:** bis 11.05.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 18.05.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.3

1. *welche Relationen*

   Im $I\!R^2$ seien die Punkte $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ gegeben.

   Welche Relationen bestehen? (Nichtzutreffende durchstreichen!)

$$
\begin{array}{ccccccc}
 & \boxed{\ll} & & \boxed{\ll} & & \boxed{\ll} & \\
 & \boxed{<} & & \boxed{<} & & \boxed{<} & \\
 & \boxed{\leq} & & \boxed{\leq} & & \boxed{\leq} & \\
 & \boxed{=} & & \boxed{=} & & \boxed{=} & \\
\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} & \boxed{\geq} & \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} & \boxed{\geq} & \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} & \boxed{\geq} & \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \\
 & \boxed{>} & & \boxed{>} & & \boxed{>} & \\
 & \boxed{\gg} & & \boxed{\gg} & & \boxed{\gg} & \\
 & \boxed{\neq} & & \boxed{\neq} & & \boxed{\neq} & \\
 & \boxed{\curlywedge} & & \boxed{\curlywedge} & & \boxed{\curlywedge} &
\end{array}
$$

---

2. *Wertebereich*
   In welchem Wertebereich müssen $x$ und $y$ liegen, damit für nachfolgende Matrizen $A$ und $B$ die Relation $A \leq B$ gilt?

$$
A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 4 & x^2 - 4x + 6 & -3 \\ y & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 4 & x & y \\ 4 & 4 & x \end{pmatrix}.
$$

---

3. *Behauptungen*
   Welche der nachfolgenden Behauptungen sind richtig, welche falsch?
   `“Es seien` $A, B$ `und` $C$ $(2,2)-$ `Matrizen. ...`

   a) `Wenn` $A$ `und` $B$ `invertierbar sind, so auch` $A + B$.”

   b) `Das Produkt` $ABC$ `ist invertierbar, wenn` $A, B$ `und` $C$ `invertierbar sind.`”

   c) `Sind` $A$ `und` $B$ `obere Dreiecksmatrizen, so auch` $AB$.”

   (Begründung / Gegenbeispiel !)

---

**Abgabetermin:** bis 18.05.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 25.05.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.4

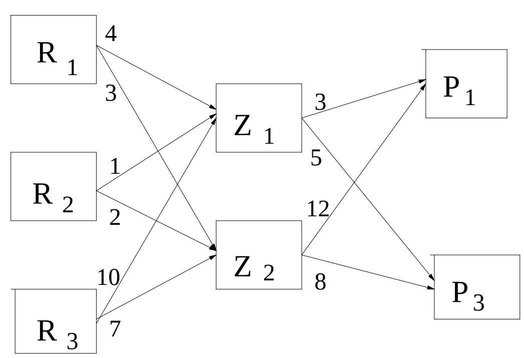
1. *geometrische Halbordnung*
   Gegeben sei der Punkt x=[3,5]. Skizzieren Sie die folgenden Teilmengen des $I\!R^2$:

   a) $A := \{y = [y_1, y_2] \in R^2 : y \geq x\}$
   b) $B := \{y = [y_1, y_2] \in R^2 : y > x\}$
   c) $C := \{y = [y_1, y_2] \in R^2 : y \gg x\}$

   Schraffieren Sie diese Mengen. Wenn die Ränder (soweit vorhanden) zur Menge zugehörig sind, sollen sie durchgezeichnet werden, falls sie nicht zugehörig sind, sollen sie gestrichelt werden.

---

2. *gozinto*
   Ein Unternehmen stellt aus drei Rohstoffen $R_1, R_2, R_3$ in einer ersten technologischen Stufe zwei Zwischenprodukte $Z_1, Z_2$ und hieraus in einer zweiten Stufe zwei Endprodukte $P_1$ und $P_2$ her. Der dabei auftretende spezifische Materialbedarf wird durch folgenden Gozintographen verdeutlicht:




   a) Stellen Sie Matrizen $V^{RZ}$ und $V^{ZP}$ auf, die den spezifischen Materialbedarf für die erste bzw. zweite Stufe des Produktionsprozesses beschreiben. Welches Format müssen diese Matrizen besitzen? Erklären Sie die Bedeutung ihrer Elemente!
   b) Geben Sie eine Matrix $V^{RP}$ so an, daß jedes Element $v_{ij}^{RP}$ den spezifischen Bedarf an Rohstoff $R_i$ zur Erzeugung des Endproduktes $P_j$ ausweist.
   c) Das Unternehmen möchte in diesem Kalenderjahr eine *Endproduktion* von

      $p_1$ ME $P_1$ und
      $p_2$ ME $P_2$

      erzielen und zusätzlich eine *Reserve* von

$z_1$ ME $Z_1$ bzw.
$z_2$ ME $Z_2$

an den Zwischenprodukten anlegen.

Führen Sie zur Bezeichnung der o.g. End- bzw. Zwischenproduktion geeignete Vektoren $\underline{p}$ bzw. $\underline{z}$ ein. $\underline{r} = (r_1, r_2, r_3)^T$ gebe den dabei auftretenden Rohstoffbedarf an $R_1, R_2$ und $R_3$ (in ME) an.

Geben Sie Gleichungen für $\underline{r}$ an, in der $\underline{r}$ mit Hilfe von

- $\underline{p}$ , $\underline{z}$ , $V^{RZ}$ und $V^{ZP}$ bzw.
- $\underline{p}$ , $\underline{z}$ , $V^{RZ}$ und $V^{RP}$

ausgedrückt wird.

d) Welches zahlenmäßige Ergebnis ergibt sich im Fall
$\underline{p} = \begin{pmatrix} 70 \\ 30 \end{pmatrix}$ $[ME]$ und $\underline{z} = \begin{pmatrix} 10 \\ 10 \end{pmatrix}$ $[ME]$ ?

---

**Abgabetermin:** bis 25.05.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 01.06.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

**Uni Paderborn, Fakultät EIM**
**– Dietz –**

ECORSYS
Mathe 2

**Sommer 2009**

# Serie 2.5

1. *Leistungsbilanz*
Im Monat Oktober 2006 ergab sich für die chemische Industrie und für die Pharmaindustrie folgende Leistungsbilanz:

| Lieferung von | Lieferung an | | |
|---|---|---|---|
| | chem. Industrie | Pharmaindustrie | übrige Wirtschaft |
| chem. Industrie | 24 | 72 | 48 |
| Pharmaindustrie | 54 | 54 | 108 |

(Alle Angaben in Mio. DM.)

Die Angaben für die Leistungsbilanz im November 2007 fallen dagegen lückenhaft aus:

| Lieferung von | Lieferung an | | |
|---|---|---|---|
| | chem. Industrie | Pharmaindustrie | übrige Wirtschaft |
| chem. Industrie | | | 264 |
| Pharmaindustrie | | | 240 |

Ergänzen Sie die fehlenden Angaben unter der Annahme, die Produktionsbedingungen seien unverändert geblieben.

**Hinweise:**

- Führen Sie – wie üblich – zunächst sinnvolle Bezeichnungen (Matrizen, Vektoren) ein und erläutern Sie deren Bedeutung (einschließlich der verwendeten Maßeinheiten).
- Erläutern Sie Ihren Lösungsansatz.

---

2. *Zwei Geraden*
Im $\mathbb{R}^2$ seien zwei Geraden $g_1$ und $g_2$ gegeben durch

$$g_1 = \left\{ \underline{r} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \lambda \in \mathbb{R} \right\}$$

und

$$g_2 = \left\{ \underline{r} = \begin{pmatrix} a \\ 6 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 4 \\ b \end{pmatrix}, \mu \in \mathbb{R} \right\}.$$

Für welche Zahlenpaare $(a, b)$

(i) schneiden sich die Geraden $g_1$ und $g_2$ in einem Punkt (und in welchem?)

(ii) sind $g_1$ und $g_2$ parallel

(iii) fallen $g_1$ und $g_2$ zusammen?

---

3. *Absatzgerade*

Ein Unternehmen produziert zwei Güter $X_1$ und $X_2$, die zu den Preisen $p_1 = 1,2\ GE/ME_1$ und $p_2 = 3\ GE/ME_2$ abgesetzt werden können. Das Ziel besteht darin, solche Mengen $x_1$ von $X_1$ und $x_2$ von $X_2$ abzusetzen, daß der Gesamterlös exakt 1200 $GE$ beträgt.
Zeigen Sie, daß alle Absatzpläne $\underline{x}^T = (x_1, x_2)$, die dieser Anforderung genügen, auf ein und derselben Geraden $g$ liegen:

(i) Zeichnen Sie die Gerade $g$ in ein passendes Koordinatensystem ein.

(ii) Geben Sie für diese Gerade

<u>a</u> eine Funktionsdarstellung ($x_2 = \dots$)

<u>b</u> eine Gleichung in Normalenform

<u>c</u> die Abschnittsform

<u>d</u> eine Parameterdarstellung

an.

(iii) Zeichnen Sie den Preisvektor $\underline{p}$ (oder ein passendes Vielfaches davon) in das Diagramm ein. Was fällt Ihnen auf?

---

**Abgabetermin:** bis 01.06.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 08.06.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.6

1. *Zwecks Bier*

   Um den ewigen Klagen über zu schlecht gefüllte Bierflaschen zu entgehen, entscheidet sich der Brauereiunternehmer *Zweck* ("*Zwecks* Bier löscht Kennerdurst"), die Abfüllmaschine für 0.33 $l-$Flaschen auf einen etwas größeren Sollwert $m$ einstellen zu lassen. Obwohl nun theoretisch alle Flaschen genau $m\ l$ Bier enthalten müßten, werden bei einer Stichprobe von $n = 10$ zufällig ausgewählten Flaschen folgende Füllmengen $x_i$ $(i = 1, \ldots, 10)$ ermittelt (in $l$):

   | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $x_4$ | $x_5$ | $x_6$ | $x_7$ | $x_8$ | $x_9$ | $x_{10}$ |
   |---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
   | 0.34 | 0.33 | 0.34 | 0.35 | 0.32 | 0.31 | 0.34 | 0.35 | 0.33 | 0.34 |

   a) Welchen Wert müßte $m$ haben, damit der beobachtete Füllmengenvektor $\underline{x}$ möglichst dicht bei dem theoretischen Füllmengenvektor $m \cdot \mathbf{1} = m[1, \ldots, 1]^T$ liegt? Geben Sie eine Formel an, die $m$ durch $n$ und $x_1, \ldots, x_n$ ausdrückt!

   **Tip 1:** *Erst nach ausreichendem Biergenuß geht die Orthogonalität verloren!*
   **Tip 2:** *Man kann sich die Formel ja mal für später merken (als Grundnahrungsmittel für die Statistik).*

   b) Welchen Zahlenwert nimmt $m$ hier an?
   **Tip 3:** *Auch hier geht's ohne Taschenrechner!*

---

2. *Produktionsplansimplex*
   Ein Rohstoff $R$ wird für die Erzeugung von drei Endprodukten $Z_1$, $Z_2$ und $Z_3$ benötigt. Es stehen 1200 Mengeneinheiten (ME) von $R$ zur Verfügung. Für eine Mengeneinheit (ME) von $Z_1$ werden je 3 ME, für eine ME von $Z_2$ werden 2 ME und für eine ME von $Z_3$ werden 4 ME von $R$ benötigt.

   a) Stellen Sie die Menge $\mathcal{P}$ aller möglichen Produktionspläne, mit denen man den Rohstoff $R$ vollständig verbrauchen kann, im $\mathbb{R}^3$ graphisch dar. Interpretieren Sie die Skizze!

   b) Kann die Menge $\mathcal{P}$ durch eine Parameterdarstellung beschrieben werden?
   Falls NEIN: Begründung!
   Falls JA: Stellen Sie diese auf.

   c) Skizzieren Sie die Menge $\mathcal{P}'$ derjenigen Produktionspläne, bei denen $R$ eventuell nicht vollständig verbraucht wird.

---

**Abgabetermin:** bis 08.06.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 15.06.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**

**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**

**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.7

1. *lineare Unabhängigkeit*

   Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind (mit Begründung):

   a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

2. *Inverse*

   Berechnen Sie zu den folgenden Matrizen die Inversen mit dem Austauschverfahren:

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 4 & 1 & 8 \end{pmatrix}$

   b) $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 6 & 0 & 8 \\ 2 & 3 & 6 & 8 \\ 3 & 6 & 9 & 5 \end{pmatrix}$

---

**Abgabetermin:** bis 15.06.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 22.06.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**

**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**

**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.8

1. *Parametrische Inverse*
   Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

   $(a \in \mathbb{R})$ mit dem Austauschverfahren.

---

**Abgabetermin:** bis 22.06.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 29.06.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

## Serie 2.9

1. *Matrixrang*

   Bestimmen Sie den Rang der folgenden Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -5 & 3 \end{pmatrix}$$

---

2. *Lineare Hülle*

   Die nachfolgenden 4 Vektoren $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ spannen einen linearen Teilraum $\mathcal{M}$ des $I\!R^3$ auf (der auch als *lineare Hülle* von $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}$ bezeichnet wird):

$$\mathcal{M} = \mathcal{L}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}, \underline{d}).$$

   (a) Ist diese ganz $I\!R^3$, eine Ebene, eine Gerade oder ein Punkt?

   (b) Auf wieviele (und beispielsweise welche) dieser 4 Vektoren kann bei der Bildung der linearen Hülle verzichtet werden, ohne daß diese sich verändert?

   (c) Versuchen Sie, $\mathcal{M}$ zu zeichnen.

$$\underline{a} = \begin{pmatrix} 9 \\ -2 \\ 5 \end{pmatrix} \underline{b} = \begin{pmatrix} -12 \\ 4 \\ -4 \end{pmatrix} \underline{c} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 7 \end{pmatrix} \underline{d} = \begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

---

**Abgabetermin:** bis 29.06.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 06.07.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

## Serie 2.10

**Abgabetermin:** **06.07.2009**
**Rückgabe ab:** **13.07.2009**

---

1. *Gleichungssysteme*

   Bestimme die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ folgender Gleichungssysteme:

   a)
   $$\begin{aligned} 4x - 3y + 5z &= 3 \\ 2x - 4y + 3z &= 10 \\ -3x + 5y - 2z &= -7 \end{aligned}$$

   b)
   $$\begin{aligned} 4x - 2y &= 6 \\ -2x + y &= -3 \end{aligned}$$

   **Hinweis:** *Stellen Sie das GLS zunächst in der Form* $A\underline{x} = \underline{b}$ *mit für a)* $\underline{x} = (x, y, z)^T$, *für b)* $\underline{x} = (x, y)^T$ *dar.*

---

2. *Schönes Gleichungssystem*

   Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

   $$\begin{array}{rcrcrcrcl} x_1 & + & 2x_2 & + & 3x_3 & + & 4x_4 & = & 1 \\ 2x_1 & + & 4x_2 & + & 5x_3 & + & 6x_4 & = & 2 \\ & & x_2 & + & 3x_3 & - & x_4 & = & 3 \end{array} \qquad (1)$$

   <u>Bestimmen Sie</u>

   (i) den Rang $r$ der Koeffizientenmatrix,

   (ii) den Rang $r'$ der erweiterten Koeffizientenmatrix,

   (iii) den Defekt $d$ des Gleichungssystems,

   (iv) den Nullraum $\mathcal{N}$,

   (v) die Menge $\mathbb{L}$ sämtlicher Lösungen.

Ergänzen bzw. korrigieren Sie:

(vi) Das Gleichungssystem (1) ist **lösbar/unlösbar**, weil ..................................

..............................................................................

(vii) Das Gleichungssystem (1) **kann/kann niemals** unlösbar werden, wenn die rechte Seite abgeändert wird, denn ..........................................................

..............................................................................

(viii) Wenn das Gleichungssystem (1) überhaupt lösbar ist, so **eindeutig/mehrdeutig**, denn

..............................................................................

---

**Abgabetermin:** bis 06.07.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 13.07.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.11

**Abgabetermin:** **13.07.2009**
**Rückgabe ab:** **20.07.2009**

1. *Gleichungssysteme und Rang*

   Prüfen Sie die Lösbarkeit der nachstehenden Gleichungssysteme durch Rangbetrachtung und bestimmen Sie die Lösung, falls eine solche existiert.

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} x_1 & + & 3x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 7 \\ 2x_1 & + & 5x_2 & - & x_3 & + & 2x_4 & = & 22 \\ 3x_1 & + & 8x_2 & + & x_3 & - & x_4 & = & 24 \end{array}$$

2. *Zwei Gleichungssysteme*

   Wir betrachten die Gleichungssysteme $A\underline{x} = \underline{y}$ mit

a) $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & -14 & 2 \\ 1 & 3 & -7 & -2 \\ 14 & 2 & -98 & 12 \\ 2 & 6 & -14 & -4 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 22 \\ 5 \\ 70 \\ 22 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} 2 & -4 & 1 \\ 0 & 7 & 3 \\ 6 & -1 & 8 \end{bmatrix}$ $\quad \underline{y} = \begin{bmatrix} 15 \\ 1 \\ 48 \end{bmatrix}$

(i) Was läßt sich anhand einer Rangbetrachtung über die Lösbarkeit von a) und b) aussagen?

(ii) Ermitteln Sie jeweils den Nullraum ($\mathcal{N}$) und die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ des Gleichungssytems (wenn möglich, in Form einer Parameterdarstellung!).

**Hinweis:** Mit eventuell auftretenden Brüchen kann exakt weitergerechnet werden!

b.w.

3. *Materialvorräte*

   Ein Unternehmen verfügt noch über Vorräte von 9, 7 bzw. 5 Mengeneinheiten an drei Rohstoffen $R_1, R_2$ und $R_3$. Es lassen sich daraus drei Erzeugnisse $E_1, E_2$ und $E_3$ nach der spezifischen Verbrauchsmatrix

$$V = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

   herstellen.

   Ermitteln Sie die Menge $\mathcal{P}$ aller Produktionspläne, mit denen – soweit möglich – die Rohstoffvorräte exakt aufgebraucht werden können.

   Hinweis: Produktionspläne sind nichtnegativ!

---

**Abgabetermin:** bis 13.07.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 20.07.2009
in den Übungsgruppen

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.12

**Abgabetermin:** **20.07.2009**
**Rückgabe ab:** **27.07.2009**

1. *Skizzieren konvexer Mengen*

   Skizzieren Sie im $I\!R^2$ mit $\underline{a} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{b} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$, $\underline{c} = \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$, $\underline{d} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix}$, $\underline{e} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

   (i) $U := \left\{\underline{x} \in I\!R^2 : \underline{a} \leq \underline{x} \leq \underline{b}\right\}$

   (ii) $V := \left\{\underline{x} \in I\!R^2 : \underline{a} \leq \underline{x} - \underline{e} \leq \underline{b}\right\}$

   (iii) $Z := conv(U \cup V)$

   (iv) $conv(0, \underline{a})$

   (v) $\mathscr{L}(0, \underline{c})$

   (vi) $K := conv\left(\left\{\underline{x} \in I\!R^2 : \ ||\underline{x}|| \leq 1\right\} \cup \left\{\begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}\right)$

2. *Fragen zur Konvexität*

   Es seien $A$ und $B$ nichtleere Teilmengen eines linearen Raumes $\mathscr{M}$.
   Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Begründung !)

   (i) $A \cup B$ ist konvex, wenn $A$ und $B$ konvex sind.

   (ii) $A \cap B$ ist konvex $\quad \Rightarrow \quad$ $A$ ist konvex, oder $B$ ist konvex.

   (iii) $conv(A) = A$, falls $A$ konvex ist.

   (iv) $\mathscr{L}(A) \subset conv(A)$

   (v) $conv(A) \subset \mathscr{L}(A)$

   (vi) Wenn $A$ endlich ist, gilt $conv(A) \neq \mathscr{L}(A)$.

   (vii) Sind $A$ und $B$ konvex, so ist auch $A \cap B$ konvex.

b.w.

3. *Materialarten*
Für die Herstellung von drei Erzeugnissen benötigt ein Betrieb zwei verschiedene Materialarten. Der Mengenbedarf und -vorrat ist in der Tabelle gegeben.

| Material | E1 | E2 | E3 | Materialvorrat |
|---|---|---|---|---|
| M1 | 4 | 2 | 1 | 80 |
| M2 | 0 | 1 | 2 | 20 |

Wieviele Einheiten sind von den einzelnen Erzeugnissen herzustellen, damit das gesamte Material verbraucht wird?

a) Geben Sie ein lineares Gleichungssystem an, dem die gesuchten Ergebnismengen notwendigerweise genügen, und bestimmen Sie dessen allgemeine Lösung (Parameterdarstellung).

b) Stellen Sie die unter (a) gefundene Lösungsmenge graphisch dar.

c) Kennzeichnen Sie die ökonomisch sinnvolle Lösungsteilmenge
– in Form einer Parameterdarstellung
– graphisch
– als konvexe Hülle (wovon?)

---

**Abgabetermin:** bis 20.07.2009 13.00 Uhr
Box 114 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** ab Mo. den 27.07.2009
im Mentorenbüro

**ACHTUNG:**
**Ecorsys-Zettel, die nach dem Abgabetermin eingeworfen werden, können leider nicht korrigiert werden.**
**Auf dem Übungszettel bitte unbedingt angeben:**
**1. Name, Vorname (bitte leserlich !)**
**2. Übungsgruppe, in der der Ü - Zettel zurückgegeben werden soll (z.B. Becker, Mi 14 - 16 )**

# Serie 2.13

## ACHTUNG:

**Dieses Ecorsys-Blatt wird nicht mehr abgegeben und nicht korrigiert. Die Lösungen finden Sie im Verlauf der ersten vorlesungsfreien Woche auf der Mathematik-II Seite unter dem Punkt "Ecorsys".**

---

1. Untersuchen Sie jede der nachfolgenden Aussagen auf Richtigkeit (= Allgemeingültigkeit). (Richtige Aussagen sind zu begründen, falsche durch geeignete Gegenbeispiele zu widerlegen.) Es seien $\mathscr{M}$ ein linearer Raum, $n \geq 2$ eine natürliche Zahl und $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n \in \mathscr{M}$.

   (i) Kommt der Nullvektor 0 unter $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ vor, sind diese linear abhängig.

   (ii) Zwei Vektoren $\underline{a}_1$ und $\underline{a}_2$ sind genau dann linear unabhängig, wenn keiner ein Vielfaches des anderen ist.

   (iii) Kommt der Nullvektor 0 unter den ersten $n-1$ Vektoren $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_{n-1}$ vor, können $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ nicht linear unabhängig sein.

   (iv) Falls $\underline{a}_1, \ldots, \underline{a}_n$ linear abhängig sind, muß $dim \mathscr{M} < n$ gelten.

---

2. *Tableau (Simplex)*

   Interpretieren Sie die folgenden (Simplex-)Tableaus.

   - Ist das Tableau optimal?
   - Ist das LOP unlösbar?
   - Ist ein weiterer Schritt möglich?
     Wenn *ja*, führen Sie diesen aus!

1)

| $T_n$ | $s_2$ | $s_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | $-1$ | 1 | 20 |
| $s_3$ | $-1$ | 3 | 10 |
| $x_1$ | 1 | $-2$ | 10 |
| $Z$ | $-1$ | $-1$ | 80 |

2)

| $T_n$ | $s_2$ | $s_1$ | 1 |
|---|---|---|---|
| $x_2$ | $-1$ | 1 | 20 |
| $s_3$ | $-1$ | 3 | 10 |
| $x_1$ | 1 | $-2$ | 10 |
| $Z$ | 0 | $-1$ | 80 |

b.w.

3)

| $T_n$ | $x_1$ | $s_2$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $s_1$ | $0$ | $1$ | $2$ |
| $x_2$ | $2$ | $-3$ | $4$ |
| $Z$ | $3$ | $5$ | $7$ |

4)

| $T_n$ | $x_1$ | $s_2$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $s_1$ | $1$ | $1$ | $2$ |
| $x_2$ | $2$ | $-2$ | $0$ |
| $Z$ | $-3$ | $2$ | $5$ |

5)

| $T_n$ | $x_1$ | $x_2$ | $x_3$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|
| $s_1$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $-\frac{5}{2}$ | $5$ |
| $s_2$ | $-1$ | $0$ | $-3$ | $50$ |
| $s_3$ | $-2$ | $-\frac{1}{2}$ | $-\frac{1}{2}$ | $25$ |
| $Z$ | $-4$ | $-\frac{3}{2}$ | $\frac{3}{2}$ | $75$ |