SERIE 2.8

1. *Ankreuzen Definitheit und stat. Punkte*
Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ besitze genau einen stationären Punkt mit zugehöriger Hesse-Matrix H. Entscheiden Sie in den nachfolgenden Beispielen - soweit möglich - über die Definitheit von H und die Art des stationären Punktes. (**Alle** zutreffenden Felder ankreuzen!)

H	Definitheit:							Art des stat. Punktes					Punkte	
$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	$\prec 0$	$\preceq 0$	$= 0$	$\succeq 0$	$\succ 0$	$\asymp 0$	?	SP	MAX	MIN	k.B.	**?**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\prec 0$	$\preceq 0$	$= 0$	$\succeq 0$	$\succ 0$	$\asymp 0$	?	SP	MAX	MIN	k.B.	**?**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\prec 0$	$\preceq 0$	$= 0$	$\succeq 0$	$\succ 0$	$\asymp 0$	?	SP	MAX	MIN	k.B.	**?**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	$\prec 0$	$\preceq 0$	$= 0$	$\succeq 0$	$\succ 0$	$\asymp 0$	?	SP	MAX	MIN	k.B.	**?**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$	$\prec 0$	$\preceq 0$	$= 0$	$\succeq 0$	$\succ 0$	$\asymp 0$	?	SP	MAX	MIN	k.B.	**?**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\prec 0$	$\preceq 0$	$= 0$	$\succeq 0$	$\succ 0$	$\asymp 0$	?	SP	MAX	MIN	k.B.	**?**	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	$\prec 0$	$\preceq 0$	$= 0$	$\succeq 0$	$\succ 0$	$\asymp 0$	?	SP	MAX	MIN	k.B.	**?**	2	1

Legende:

$\succ$	positiv	definit
$\prec$	negativ	definit
$\succeq$	positiv	semidefinit
$\preceq$	negativ	semidefinit
$=$	sowohl $\succeq$ als auch $\preceq$	
$\asymp$	indefinit	

SP	(verallg.) Sattelpunkt
MAX	(lokaler) Maximumpunkt
MIN	(lokaler) Minimumpunkt
k.B.	keine Beurteilung möglich ohne Zusatz – Info
?	weiß nicht

Hinweis zur Bewertung:
- Eine *richtige* Antwort ergibt die angegebene Punktzahl.
- Eine *falsche* Antwort ergibt entsprechend viele Minuspunkte.
- "gar nichts ankreuzen" ergibt ebenfalls Minuspunkte.
- "weiß nicht" ergibt jeweils 0 Punkte.

Daher: Im Zweifelsfall "weiß nicht" ankreuzen.

AUSSERDEM: NEBENRECHNUNGEN BITTE AUF GESONDERTEM BLATT BEIFÜGEN!

2. *Lokales Maximum und Minimum*
Wir betrachten die durch

$$f(x,y) = 4x^4 - 8xy + \frac{2}{27}y^2 \quad \text{für} \quad (x,y) \in I\!R^2$$

definierte Funktion f.

(a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f = (f_x, f_y)$ und die Hesse-Matrix $H := \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix}$ von f.

(b) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese dahingehend, ob ein lokaler Minimum- bzw. Maximumpunkt oder ein (verallgemeinerter) Sattelpunkt vorliegt oder evtl. anhand der Hesse-Matrix allein eine Beurteilung nicht möglich ist.

(c) Ist f auf einem Teil des Definitionsbereiches konkav/konvex? Wenn ja, auf welchem?

---

3. *Lokale Extrema ankreuzen I*
Auf $I\!R^2$ werde die Funktion f

$$f(x,y) = x^4 - 4x^2y^2 + xy^2$$

betrachtet. Diese besitzt $(0,0)$ als stationären Punkt. Stellen Sie fest, ob weitere stationäre Punkte existieren, und klassifizieren Sie diese mit Hilfe der Hesse – Matrix bzw. durch Analyse von Vertikalschnitten (z.B. "$y = ax$" für geeignete Konstanten a).

Kreuzen Sie die zutreffenden Felder an:

Der Punkt	ist stationärer Punkt	und zwar (falls JA):	(falls NEIN):	Punkte	
$(0,0)$	JA	SP MAX MIN ?	Entfällt		1
$\left(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1	1
$\left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1	1
$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1	1
$\left(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1	1
$\left(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1	1
$\left(0, \frac{1}{4}\right)$	JA NEIN ?	SP MAX MIN ?	Entfällt	1	1

Hinweis: Punktvergabe analog zu Aufgabe 2.8.1 (minimal 0, maximal 13 Punkte). Nebenrechnungen bitte beifügen.

Abgabe: bis 17.06.2005 11.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen