



## SERIE 2.8

### 1. Ankreuzen Definitheit und stat. Punkte

Eine Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  besitze genau einen stationären Punkt mit zugehöriger Hesse-Matrix  $H$ . Entscheiden Sie in den nachfolgenden Beispielen - soweit möglich - über die Definitheit von  $H$  und die Art des stationären Punktes. (**Alle** zutreffenden Felder ankreuzen!)

$H$	Definitheit:	Art des stat. Punktes	Punkte
$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $\leq 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\geq 0$ <input type="checkbox"/> $< 0$ <input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $\leq 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\geq 0$ <input type="checkbox"/> $< 0$ <input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $\leq 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\geq 0$ <input type="checkbox"/> $< 0$ <input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $\leq 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\geq 0$ <input type="checkbox"/> $< 0$ <input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $\leq 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\geq 0$ <input type="checkbox"/> $< 0$ <input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $\leq 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\geq 0$ <input type="checkbox"/> $< 0$ <input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $\leq 0$ <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\geq 0$ <input type="checkbox"/> $< 0$ <input type="checkbox"/> $> 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	2 1

### Legende:

$>$  positiv } definit  
 $<$  negativ }

$\geq$  positiv } semidefinit  
 $\leq$  negativ }

$=$  sowohl  $\geq$  als auch  $\leq$

$\times$  indefinit

SP (verallg.) Sattelpunkt

MAX (lokaler) Maximumpunkt

MIN (lokaler) Minimumpunkt

k.B. keine Beurteilung möglich ohne Zusatz – Info

? weiß nicht

### Hinweis zur Bewertung:

- Eine *richtige* Antwort ergibt die angegebene Punktzahl.
- Eine *falsche* Antwort ergibt entsprechend viele Minuspunkte.
- “gar nichts ankreuzen” ergibt ebenfalls Minuspunkte.
- “weiß nicht” ergibt jeweils 0 Punkte.

Daher: Im Zweifelsfall “weiß nicht” ankreuzen.

AUSSERDEM: NEBENRECHNUNGEN BITTE AUF GESONDERTEM BLATT BEIFÜGEN!

2. *Lokales Maximum und Minimum*

Wir betrachten die durch

$$f(x, y) = 4x^4 - 8xy + \frac{2}{27}y^2 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

definierte Funktion  $f$ .

- (a) Berechnen Sie den Gradienten  $\nabla f = (f_x, f_y)$  und die Hesse-Matrix

$$H := \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \text{ von } f.$$

- (b) Berechnen Sie alle stationären Punkte von  $f$  und klassifizieren Sie diese dahingehend, ob ein lokaler Minimum- bzw. Maximumpunkt oder ein (verallgemeinerter) Sattelpunkt vorliegt oder evtl. anhand der Hesse-Matrix allein eine Beurteilung nicht möglich ist.
- (c) Ist  $f$  auf einem Teil des Definitionsbereiches konkav/konvex? Wenn ja, auf welchem?

3. *Lokale Extrema ankreuzen I*

Auf  $\mathbb{R}^2$  werde die Funktion  $f$

$$f(x, y) = x^4 - 4x^2y^2 + xy^2$$

betrachtet. Diese besitzt  $(0, 0)$  als stationären Punkt. Stellen Sie fest, ob weitere stationäre Punkte existieren, und klassifizieren Sie diese mit Hilfe der Hesse – Matrix bzw. durch Analyse von Vertikalschnitten (z.B. “ $y = ax$ ” für geeignete Konstanten  $a$ ).

Kreuzen Sie die zutreffenden Felder an:

Der Punkt	ist stationärer Punkt	und zwar (falls JA):	(falls NEIN):	Punkte
$(0, 0)$	<input type="checkbox"/> JA	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1
$(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(0, \frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1

**Hinweis:** Punktvergabe analog zu Aufgabe 2.8.1 (minimal 0, maximal 13 Punkte). Nebenrechnungen bitte beifügen.

**Abgabe:** bis 17.06.2005 11.00 Uhr  
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

**Rückgabe:** eine Woche später  
in den Übungsgruppen