SERIE 2.5

1. *Vorbereitungs- und Wiederholungsaufgabe 2005*

Erinnerung an bekannte Begriffe:

1) Bekanntlich kann man die Determinante *einer* $(n,n)-$*Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

im Fall $n = 2$ *nach der "Kreuzregel" berechnen:*

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,;$$

im Fall $n = 3$ *steht die Regel von Sarrus ("Jägerzaunregel") zur Verfügung:*

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

die Berechnung für jedes beliebige n *kann mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes erfolgen (Ausfhrungen hierzu folgen noch in den weiteren Vorlesungen).*
Beispiel zur "Jägerzaunregel":

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \text{"Jägerzaun":} \quad \begin{array}{ccccc} 4 & 0 & 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 7 & 3 & 0 & 7 & 3 \end{array}$$

$$\det M = \boxed{4\cdot 2\cdot 0} + \boxed{0\cdot(-1)\cdot 7} + \boxed{5\cdot 1\cdot 3} - \boxed{7\cdot 2\cdot 5} - \boxed{3\cdot(-1)\cdot 4} - \boxed{0\cdot 1\cdot 0} = -43$$

2) Jede Zahl λ *mit* $\det(A-\lambda I) = 0$ *heißt ein* Eigenwert *von* A *(vgl. ECO RSYS-Blatt 2.4). Die linke Seite der Gleichung* $\det(A-\lambda I) = 0$ *ist ein Polynom* $n-$*ten Grades in der Unbekannten* λ *(welches auch als* charakteristisches Polynom *der Matrix* A *bezeichnet wird). Deswegen kann diese Gleichung bis zu* n *verschiedene Lösungen besitzen, eventuell aber auch unlösbar sein. Wenn jedoch* A symmetrisch *ist - d.h., wenn gilt* $A = A^T$ *-, ist diese Gleichung immer lösbar.*

Aufgabe 0: Man bestimme alle Eigenwerte folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = 13$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Neue Begriffe I:
Eine symmetrische $(n,n)-$Matrix A heißt

a)	positiv definit	*(symbolisch: $A \succ 0$)*
b)	positiv semidefinit	*(symbolisch: $A \succcurlyeq 0$)*
c)	negativ semidefinit	*(symbolisch: $A \preccurlyeq 0$)*
d)	negativ definit	*(symbolisch: $A \prec 0$)*
e)	indefinit	*(symbolisch: $A \asymp 0$)*,

wenn

a) *alle Eigenwerte positiv*

b) *alle Eigenwerte nichtnegativ*

c) *alle Eigenwerte nichtpositiv*

d) *alle Eigenwerte negativ sind bzw.*

e) *mindestens ein Eigenwert positiv und mindestens ein Eigenwert negativ sind.*

Aufgabe I:

1) Stellen Sie für jede der Matrizen A bis G fest, über welche der Eigenschaften a) bis e) sie verfügt.
2) Welche Bedeutung haben die Eigenschaften a) bis d) im Fall $n = 1$?

Neue Begriffe II:

Für eine $(n,n)-$Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ *bilden wir die folgenden Determinanten:*

$$\begin{aligned} H_1(A) &= a_{11} \ (= \det a_{11}) \\ H_2(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\ H_3(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\ &\vdots \\ H_n(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Diese werden wir im weiteren als "Hesse-Determinanten" bezeichnen.

Aufgabe II:
Bilden Sie für jede der Matrizen A bis G die Hesse-Determinanten H_1, H_2 und H_3 (jeweils soweit sinnvoll). Notieren Sie die Folge der auftretenden Vorzeichen (z.B. "$+,-$") und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis der Teilaufgabe I. Was fällt Ihnen auf?

2. *Schmiegefläche geändert*
Fortsetzung von Aufgabe 3 der Serie 2.3:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = xy + e^{-x^2+xy} \ , \ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \ .$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Schmiegefläche 2. Ordnung im gleichen Punkt $(1,1)$.

Abgabe: bis 27.05.2005 11.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen