SERIE 2.5

1. *Vorbereitungs- und Wiederholungsaufgabe 2005*

Erinnerung an bekannte Begriffe:

1) *Bekanntlich kann man die* Determinante *einer* $(n, n)-$*Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

im Fall $n = 2$ *nach der "Kreuzregel" berechnen:*

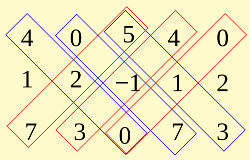
$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}\,;$$

im Fall $n = 3$ *steht die Regel von Sarrus ("Jägerzaunregel") zur Verfügung:*

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

die Berechnung für jedes beliebige n *kann mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes erfolgen (Ausfhrungen hierzu folgen noch in den weiteren Vorlesungen).*
Beispiel zur "Jägerzaunregel":

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$ *"Jägerzaun":*



$$\det M = \boxed{4\cdot 2\cdot 0} + \boxed{0\cdot(-1)\cdot 7} + \boxed{5\cdot 1\cdot 3} - \boxed{7\cdot 2\cdot 5} - \boxed{3\cdot(-1)\cdot 4} - \boxed{0\cdot 1\cdot 0} = -43$$

2) *Jede Zahl* λ *mit* $\det(A-\lambda I) = 0$ *heißt ein* Eigenwert *von* A *(vgl. ECO RSYS-Blatt 2.4). Die linke Seite der Gleichung* $\det(A - \lambda I) = 0$ *ist ein Polynom* $n-$*ten Grades in der Unbekannten* λ *(welches auch als* charakteristisches Polynom *der Matrix* A *bezeichnet wird). Deswegen kann diese Gleichung bis zu* n *verschiedene Lösungen besitzen, eventuell aber auch unlösbar sein. Wenn jedoch* A symmetrisch *ist - d.h., wenn gilt* $A = A^T$ *-, ist diese Gleichung immer lösbar.*

Aufgabe 0: Man bestimme alle Eigenwerte folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \qquad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \qquad D = 13$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \qquad F = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Neue Begriffe I:

Eine symmetrische $(n,n)-$Matrix A heißt

a) positiv definit *(symbolisch: $A \succ 0$)*

b) positiv semidefinit *(symbolisch: $A \succcurlyeq 0$)*

c) negativ semidefinit *(symbolisch: $A \preccurlyeq 0$)*

d) negativ definit *(symbolisch: $A \prec 0$)*

e) indefinit *(symbolisch: $A \asymp 0$)*,

wenn

a) alle Eigenwerte positiv

b) alle Eigenwerte nichtnegativ

c) alle Eigenwerte nichtpositiv

d) alle Eigenwerte negativ sind bzw.

e) mindestens ein Eigenwert positiv und mindestens ein Eigenwert negativ sind.

Aufgabe I:

1) Stellen Sie für jede der Matrizen A bis G fest, über welche der Eigenschaften a) bis e) sie verfügt.
2) Welche Bedeutung haben die Eigenschaften a) bis d) im Fall $n = 1$?

Neue Begriffe II:

Für eine $(n,n)-$Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ bilden wir die folgenden Determinanten:

$$
\begin{aligned}
H_1(A) &= a_{11} \ (= \det a_{11}) \\
H_2(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \\
H_3(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \\
&\vdots \\
H_n(A) &= \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}
\end{aligned}
$$

Diese werden wir im weiteren als "Hesse-Determinanten" bezeichnen.

Aufgabe II:

Bilden Sie für jede der Matrizen A bis G die Hesse-Determinanten H_1, H_2 und H_3 (jeweils soweit sinnvoll). Notieren Sie die Folge der auftretenden Vorzeichen (z.B. "$+, -$") und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis der Teilaufgabe I. Was fällt Ihnen auf?

nächste Seite

2. *Schmiegefläche geändert*
Fortsetzung von Aufgabe 3 der Serie 2.3:
Gegeben sei die Funktion

$$f(x, y) = xy + e^{-x^2+xy}\ ,\ (x, y) \in \mathbb{R}^2\ .$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Schmiegefläche 2. Ordnung im gleichen Punkt $(1, 1)$.

Abgabe: bis 27.05.2005 11.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen