SERIE 2.4

1. *Produktionsfunktion*
   Gegeben sei die Produktionsfunktion

$$p = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} \qquad (x, y \geq 0),$$

   wobei p den Output und x, y die Faktoreinsatzmengen zweier Produktionsfaktoren X, Y bezeichnen. Der gegenwärtige Faktoreinsatz beträgt $x_0 = 64,\ y_0 = 50$ ([ME]).

   (i) Um wieviel ME wird sich der Output näherungsweise erhöhen, wenn $64,4$ ME des Faktors X und $50,2$ ME des Faktors Y statt der bisherigen Mengen eingesetzt werden?

   (ii) In welchem Verhältnis müßte man die Faktoreinsätze erhöhen, um bereits bei geringfügiger Erhöhung einen maximalen Zuwachs des Outputs zu erreichen?

   (iii) Wie hoch ist die maximale Zuwachsrate des Outputs an der Stelle $x_0 = 64,\ y_0 = 50$?

---

2. *Elementares Maximumproblem*
   Auf $D = \mathbb{R}^2$ werde die Funktion f mit

$$f(\underline{x}) = f(x, y) = 500 - 5(x-3)^2 - 6xy - 2(y-4)^2$$

   betrachtet.

   (i) Man bestimme $\nabla f = \text{grad } f$ (als Funktion von $\underline{x} = (x, y)$).

   (ii) Man bestimme alle Punkte $\underline{x}^* = (x^*, y^*) \in D$, für die gilt $\nabla f(\underline{x}^*) = 0$.
   Bemerkung: *Ein solcher Punkt heißt "stationärer Punkt" von f.*
   Hinweis:
   - *Die o.g. Funktion f besitzt genau einen stationären Punkt.*
   - *Um diese zu finden: Gradient gleich Nullvektor setzen, Koordinaten errechnen.*
   - *Dabei ist ein (einfaches) lineares Gleichungssystem zu lösen.*

   (iii) Man berechne die Hesse – Matrix $H = \nabla^2 f$.
   Anmerkung: *H hängt nicht von $\underline{x} = (x, y)$ ab.*

   (iv) Eine reelle Zahl λ heißt *Eigenwert* von H, wenn gilt $\det(H - \lambda \cdot I) = 0$.
   H besitzt zwei Eigenwerte. Berechnen Sie diese!

   (v) Erarbeiten Sie eine Vermutung: f besitzt im o.g. Punkt $\underline{x}^*$ ein Maximum/Minimum/weder – noch ...
   Tip: *Betrachten Sie die Vertikalschnitte $x = x^*$ und $y = y^*$, wobei x^* und y^* die Koordinaten des stationären Punktes aus Teilaufgabe (ii) sind.*

---

b.w.

3. *Vorbereitungsaufgabe "Elastizitäten"*
Es sei $f : D \to I\!R$, $D \subset I\!R$, eine differenzierbare Funktion. Der Ausdruck

$$\varepsilon_f(x) := \frac{xf'(x)}{f(x)}, \text{ soweit definiert,}$$

heißt "Elastizität von f an der Stelle x" ($x \in D$).
Berechnen Sie diese als Funktion von x für:

(a)	$f(x)$	$=$	$10 - 2(x-5)^2$	$D = I\!R$
(b)	$g(x)$	$=$	$3\sqrt{x}$	$D = [\,0, \infty\,)$
(c)	$h(x)$	$=$	$5e^{2x}$	$D = I\!R$
(d)	$j(x)$	$=$	$\ln(1+x)$	$D = (\,-1, \infty\,)$
(e)	$k(x)$	$=$	$\sqrt{1+x^2}$	$D = I\!R$

Bestimmen Sie dabei jeweils auch die Definitionsbereiche von ε und (außer im Fall (a) und (d)) diejenigen Teilmengen von D_ε, auf denen $|\,\varepsilon(x)\,| > 1$, $|\,\varepsilon(x)\,| = 1$ bzw. $|\,\varepsilon(x)\,| < 1$ gilt.

Abgabe: bis 20.05.2005 11.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen