SERIE 2.9

1. *Definitheit neu*

Vorbemerkung:
In ECORSYS-Serie 2.8 wurden die sog. “Hesse-Determinanten” $H_1(M), \ldots, H_n(M)$ einer symmetrischen $(n,n)-$Matrix M eingeführt. Mit ihrer Hilfe kann man M wie folgt auf Definitheit untersuchen:

Satz: (“Hesse-Determinanten-Satz”, kurz “HDS”)
Es sei $n \in I\!N$ und M eine symmetrische $(n,n)-$Matrix. Dann gilt:

(i) Die Matrix M ist genau dann positiv definit, wenn sämtliche ihrer Hesse-Determinanten positiv sind:

$H_1(M) > 0, \ldots, H_n(M) > 0.$

(ii) Die Matrix M ist genau dann negativ definit, wenn sämtliche ihrer Hesse-Determinanten von Null verschieden sind und - mit $H_1(M) < 0$ beginnend - alternierende Vorzeichen besitzen:

$$H_1(M) < 0,\ H_2(M) > 0,\ H_3(M) < 0, \ldots,\ H_n(M) \begin{cases} > 0 & n \text{ gerade} \\ < 0 & n \text{ ungerade} \end{cases}$$

(iii) Wenn $\det M \neq 0$ gilt und keiner der beiden Fälle (i) oder (ii) vorliegt, ist M indefinit.

Bemerkung: Es gibt noch weitere als die unter (i)-(iii) genannten Möglichkeiten. Diese können mit dieser Methode allerdings nicht erkannt werden.

Beispiele:

1) $n = 1,\ M = 5;$ hier gilt $H_1(M) = H_n(M) > 0,$ also gilt $M \succ 0.$

2) $M = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}.$ Es gilt: $H_1 = 5$ $H_2 = 16$; Vorzeichen: $\oplus$ $\oplus$

Aus dem HDS (i) folgt: $M \succ 0.$

3) $K = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 3 & -5 \end{pmatrix}.$ Es gilt: $H_1 = -5$ $H_2 = 16$; Vorzeichen: $\ominus$ $\oplus$

Aus HDS (ii) folgt: $K \prec 0.$

4) $C = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$ Es gilt: $H_1 = 1$ $H_2 = -3$; Vorzeichen: $\oplus$ $\ominus$

Hier ist $\det C = H_2(C) \neq 0$, jedoch liegt weder die Situation von HDS (i) (Vorzeichenfolge $\oplus\oplus$) noch die von HDS (ii) (Vorzeichenfolge $\ominus\oplus$) vor. Nach Teil (iii) von HDS ist C indefinit: $C \asymp 0.$

5) $D = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}.$ Es gilt: $H_1 = 1$ $H_2 = 0$; Vorzeichen: $\oplus$ $\odot$

Es liegt keine der in HDS beschriebenen Situationen vor, damit läßt sich lediglich aussagen: $D \not\prec 0,\ D \not\asymp 0$.

Aufgabe:
Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit ! (Benutzen Sie, soweit möglich, die Methode der Hesse-Determinanten. In den übrigen Fällen sind die Eigenwerte zu ermitteln.)

$$A = \begin{pmatrix} 108 & 21 \\ 21 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 49 & -7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -20 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 108 & -9 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$F = \begin{pmatrix} -5 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \\ 1 & 2 & -7 \end{pmatrix}$$

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 6 \\ 3 & 6 & 11 \end{pmatrix}$$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 5 & a \end{pmatrix} \text{ (in Abhängigkeit von der Wahl von } a \in \mathbb{R}\text{)}$$

---

2. *Stationäre Punkte und Monotonie*
   Durch den Ausdruck $f(x,y) = \ln(1 + x^2 + y^2)$ soll eine Funktion f definiert werden.
   (i) Bestimmen Sie den (größtmöglichen) Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$.
   (ii) Stellen Sie fest, ob f stationäre Punkte besitzt und welcher Art diese sind.
   (iii) Geben Sie einen möglichst großen Teil D^+ des Definitionsbereiches D derart an, daß gilt

$$f \text{ ist monoton wachsend auf } D^+.$$

Hinweis: *Multipliziert man eine* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{positiv} \\ \textit{negativ} \end{array} \right\}$ *definite Matrix mit einem positiven Faktor, ist die Ergebnismatrix wiederum* $\left\{ \begin{array}{c} \textit{positiv} \\ \textit{negativ} \end{array} \right\}$ *definit.*

Abgabe: bis 18.06.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen