

SERIE 2.8

1. Vorbereitungs- und Wiederholungsaufgabe

Erinnerung an bekannte Begriffe:

1) Bekanntlich kann man die Determinante einer (n, n) -Matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

im Fall $n = 2$ nach der "Kreuzregel" berechnen:

$$\det A = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12};$$

im Fall $n = 3$ steht die Regel von Sarrus ("Jägerzaunregel") zur Verfügung:

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12};$$

die Berechnung für jedes beliebige n kann mit Hilfe des Laplaceschen Entwicklungssatzes erfolgen (vgl. hierzu die Ausführungen im Teil Mathematik A).

Beispiel zur "Jägerzaunregel":

$$M = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ 7 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{"Jägerzaun":}$$

$$\det M = \boxed{4 \cdot 2 \cdot 0} + \boxed{0 \cdot (-1) \cdot 7} + \boxed{5 \cdot 1 \cdot 3} - \boxed{7 \cdot 2 \cdot 5} - \boxed{3 \cdot (-1) \cdot 4} - \boxed{0 \cdot 1 \cdot 0} = -43$$

2) Jede Zahl λ mit $\det(A - \lambda I) = 0$ heißt ein Eigenwert von A (vgl. EO RSYS-Blatt 2.7). Die linke Seite der Gleichung $\det(A - \lambda I) = 0$ ist ein Polynom n -ten Grades in der Unbekannten λ (welches auch als charakteristisches Polynom der Matrix A bezeichnet wird). Deswegen kann diese Gleichung bis zu n verschiedene Lösungen besitzen, eventuell aber auch unlösbar sein. Wenn jedoch A symmetrisch ist - d.h., wenn gilt $A = A^T$ -, ist diese Gleichung immer lösbar.

Aufgabe 0: Man bestimme alle Eigenwerte folgender Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \quad D = 13$$

$$E = \begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 3 & -6 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{pmatrix}$$

Neue Begriffe I:

Eine symmetrische (n, n) -Matrix A heißt

- a) positiv definit (symbolisch: $A \succ 0$)
- b) positiv semidefinit (symbolisch: $A \succcurlyeq 0$)
- c) negativ semidefinit (symbolisch: $A \preccurlyeq 0$)
- d) negativ definit (symbolisch: $A \prec 0$)
- e) indefinit (symbolisch: $A \asymp 0$),

wenn

- a) alle Eigenwerte positiv
- b) alle Eigenwerte nichtnegativ
- c) alle Eigenwerte nichtpositiv
- d) alle Eigenwerte negativ sind bzw.
- e) mindestens ein Eigenwert positiv und mindestens ein Eigenwert negativ sind.

Aufgabe I:

- 1) Stellen Sie für jede der Matrizen A bis G fest, über welche der Eigenschaften a) bis e) sie verfügt.
- 2) Welche Bedeutung haben die Eigenschaften a) bis d) im Fall $n = 1$?

Neue Begriffe II:

Für eine (n, n) -Matrix $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ bilden wir die folgenden Determinanten:

$$H_1(A) = a_{11} (= \det a_{11})$$

$$H_2(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

$$H_3(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

\vdots

$$H_n(A) = \det \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Diese werden wir im weiteren als "Hesse-Determinanten" bezeichnen.

Aufgabe II:

Bilden Sie für jede der Matrizen A bis G die Hesse-Determinanten H_1 , H_2 und H_3 (jeweils soweit sinnvoll). Notieren Sie die Folge der auftretenden Vorzeichen (z.B. "+, -") und vergleichen Sie diese mit dem Ergebnis der Teilaufgabe I. Was fällt Ihnen auf?

2. Gradient und Monotonieatlas

Auf der Menge $D := \mathbb{R}^2$ werde die Funktion f betrachtet:

$$f(x, y) = 2x^2 + 2xy + 4y^2 + 8x + 16y, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

- (i) Skizzieren Sie diejenige Teilmenge D^+ von D , auf der der Gradient von f nichtnegativ ist, d.h.

$$D^+ := \{ f' \geq 0 \} = \{ (x, y) \in D \mid f'(x, y) \geq 0 \}.$$

Kennzeichnen Sie in der Skizze, ob etwaige Randpunkte von D^+ zu D^+ gehören und ermitteln Sie die Koordinaten mindestens dreier Randpunkte rechnerisch.

- (ii) Bestimmen Sie alle Eigenwerte der Hesse-Matrix $H = f''$ von f .

Hinweis: Diese Aufgabe kann mit den Methoden aus "Mathe A" sehr leicht gelöst werden.

Abgabe: bis 11.06.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen