SERIE 2.7

1. *Polynomiale Produktionsfunktion*
   Auf $D := \mathbb{R}^2$ werde die Funktion f mit

$$f(x,y) = (y+1)^4 + x^3 - \left(x - \frac{1}{6}\right)^2 - \frac{35}{36}$$

   betrachtet.

   (i) Begründen Sie, weshalb f auf dem (verkleinerten) Definitionsbereich $D_{oec} := [\,0,\infty\,) \times [\,0,\infty\,)$ als Modell für eine Produktionsfunktion dienen kann.

   (ii) Ausgehend vom Punkt $\underline{x}^0 = (\,x^0, y^0\,) = (\,2,2\,)$ werde ein Vertikalschnitt in Richtung $\underline{r} = (\,2,3\,)$ geführt. Welchen Anstieg hat die Tangente an diesem Schnitt im Punkt $\big(\underline{x}^0, f(\underline{x}^0)\,\big)$?

   (iii) Welche ökonomische Interpretation hat der unter (ii) ermittelte Anstieg?

   (iv) Bestimmen Sie die Grenzrate der Substitution im Punkt $\underline{x}^0$.

   (v) Angenommen, der Einsatz des ersten Produktionsfaktors werde von 2 auf $2,01$ Einheiten gesteigert. Wieviele Einheiten des zweiten Produktionsfaktors (statt bisher 2) werden bei konstantem Output benötigt? (Geben Sie diesen Wert näherungsweise an!)

---

2. *Elementares Maximumproblem*
   Auf $D = \mathbb{R}^2$ werde die Funktion f mit

$$f(\underline{x}) = f(x,y) = 500 - 5(x-3)^2 - 6xy - 2(y-4)^2$$

   betrachtet.

   (i) Man bestimme $\nabla f = \text{grad}\, f$ (als Funktion von $\underline{x} = (x,y)$).

   (ii) Man bestimme alle Punkte $\underline{x}^* = (x^*, y^*) \in D$, für die gilt $\nabla f(\underline{x}^*) = 0$.
   Bemerkung: *Ein solcher Punkt heißt "stationärer Punkt" von f.*
   Hinweis:
   - *Die o.g. Funktion f besitzt genau einen stationären Punkt.*
   - *Um diese zu finden: Gradient gleich Nullvektor setzen, Koordinaten errechnen.*
   - *Dabei ist ein (einfaches) lineares Gleichungssystem zu lösen.*

   (iii) Man berechne die Hesse – Matrix $H = \nabla^2 f$.
   Anmerkung: *H hängt nicht von $\underline{x} = (x,y)$ ab.*

   (iv) Eine reelle Zahl λ heißt *Eigenwert* von H, wenn gilt $\det(H - \lambda \cdot I) = 0$.
   H besitzt zwei Eigenwerte. Berechnen Sie diese!

   (v) Erarbeiten Sie eine Vermutung: f besitzt im o.g. Punkt $\underline{x}^*$ ein Maximum/Minimum/weder – noch ...
   Tip: *Betrachten Sie die Vertikalschnitte $x = x^*$ und $y = y^*$, wobei x^* und y^* die Koordinaten des stationären Punktes aus Teilaufgabe (ii) sind.*

---

b.w.

3. *Monotonie und Gradient*
Auf dem Definitionsbereich $D = (0, \infty) \times \mathbb{R}$ werde die Funktion φ mit $\varphi(x, y) = x^y$ betrachtet. Geben Sie möglichst große Teilmengen D^+ und D^- von D derart an, daß φ auf D^+ monoton wachsend und auf D^- monoton fallend ist. (Skizze!)
Hinweis: Untersuchen Sie den Gradienten von φ.

Abgabe: bis 04.06.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen