SERIE 2.6

1. *Wiederholungsaufgabe Ungleichungen*

Vorbemerkung:

GRUNDEIGENSCHAFTEN VON UNGLEICHUNGEN: Für alle $x, y, z \in I\!R$ gilt

(R)	$x \leqslant y$	*"Reflexivität"*
(A)	$x \leqslant y \quad \wedge \quad y \leqslant x \quad \Rightarrow \quad x = y$	*"Antisymmetrie"*
(T)	$x \leqslant y \quad \wedge \quad y \leqslant z \quad \Rightarrow \quad x \leqslant z$	*"Transitivität"*

AUSGEWÄHLTE RECHENREGELN:

(1)	$x \leqslant y$	$\Leftrightarrow \quad x + a \leqslant y + a$	*"Additionsregel"*
(2)	$x \leqslant y$	$\Leftrightarrow \quad \begin{cases} \lambda x \leqslant \lambda y & \text{für } \lambda > 0 \\ \lambda x \geqslant \lambda y & \text{für } \lambda < 0 \end{cases}$	*"Vervielfachungssregel"*
(3)	$0 < x \leqslant y$	$\Leftrightarrow \quad 0 < \dfrac{1}{y} \leqslant \dfrac{1}{x}$	*"Reziprozitätsregel"*

(1)-(3) bleiben richtig, wenn überall "$\leqslant$" durch "$<$" ersetzt wird.

DIE BETRAGSFUNKTION:

Definition: $|\,x\,| := \begin{cases} x & \text{falls } x \geqslant 0 \text{ gilt} \\ -x & \text{falls } x < 0 \text{ gilt} \end{cases} \qquad (x \in I\!R)$

Grundeigenschaften:

(N1)	$|\,x\,| \geqslant 0$ für alle x und: $|\,x\,| = 0 \Leftrightarrow x = 0$	*"Positivität"*
(N2)	$|\,\lambda x\,| = |\,\lambda\,|\,|\,x\,| \qquad (\lambda, x \in I\!R)$	*"Homogenität"*
(N3)	$|\,x + y\,| \leqslant |\,x\,| + |\,y\,| \qquad (x, y \in I\!R)$	*"Dreiecksungleichung"*

(Dies sind die Eigenschaften einer "Norm", wie sie auch die im $I\!R^n$ bekannte "Norm" besitzt.)

Aufgabe:

(1) Interpretieren Sie die Rechenregeln *(1)-(3)* verbal und versuchen Sie, für jede ein Anwendungsbeispiel zu finden.

(2) Bestimmen Sie die Lösungsmenge von $x^2 - x - 6 \leqslant 0$.

(3) Zeigen Sie unter Verwendung der Rechenregeln *(1)-(3)*, daß gilt ("Addition von Ungleichungen")

$$u \leqslant v \text{ und } w \leqslant x \quad \Rightarrow \quad u + w \leqslant v + x \qquad (u, v, w, x \in I\!R)\,.$$

(4) Lösen Sie die folgende Ungleichung nach y auf und skizzieren Sie die Lösungsmenge im $I\!R^2$:

$$(x - 1)\, y^2 \leqslant 1\,.$$

(5) Dasselbe für $|\,x - 1\,|\, y^2 \leqslant 1$.

(6) Dasselbe für $\big|\,|\,x\,| + 1\,\big| \leqslant \big|\,|\,y\,| - 1\,\big|$.

2. *Totales Differential*
   Für die Funktion
$$f(x,y) = 1 - e^{-(x^2+y^2)}$$
   bestimme man das totale Differential

   (i) allgemein

   (ii) an der Stelle $(x_0, y_0) = (1.5, 2)$.

   (iii) Welche Interpretation hat der zuletzt berechnete Wert?

   (iv) In welcher Richtung steigt - ausgehend vom Punkt (x_0, y_0) - die Funktion f am stärksten an?

   (v) Wie groß ist dieser Anstieg?

---

3. *Produktionsfunktion*
   Gegeben sei die Produktionsfunktion
$$p = x^{\frac{1}{4}} y^{\frac{1}{2}} \qquad (x, y \geq 0),$$
   wobei p den Output und x, y die Faktoreinsatzmengen zweier Produktionsfaktoren X, Y bezeichnen. Der gegenwärtige Faktoreinsatz beträgt $x_0 = 64,\ y_0 = 50$ ([ME]).

   (i) Um wieviel ME wird sich der Output näherungsweise erhöhen, wenn $64,4$ ME des Faktors X und $50,2$ ME des Faktors Y statt der bisherigen Mengen eingesetzt werden?

   (ii) In welchem Verhältnis müßte man die Faktoreinsätze erhöhen, um bereits bei geringfügiger Erhöhung einen maximalen Zuwachs des Outputs zu erreichen?

   (iii) Wie hoch ist die maximale Zuwachsrate des Outputs an der Stelle $x_0 = 64,\ y_0 = 50$?

Abgabe: bis 28.05.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen