SERIE 2.5

1. *Wiederholungsaufgabe Ableitungsregeln*

Vorbemerkung:
Zum Handwerkszeug der Differentialrechnung gehören einige Grundableitungen und Ableitungsregeln wie folgt:

Tabelle der wichtigsten GRUNDABLEITUNGEN

	$f(x)$	$f'(x)$	*Anmerkungen*
Potenzfunktionen:	x^p	px^{p-1}	*DB beachten!*
Exponentialfunktion:	e^x	e^x	$x \in \mathbb{R}$
Logarithmusfunktion:	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$x > 0$
Winkelfunktionen:	$\sin x$	$\cos x$	$x \in \mathbb{R}$
	$\cos x$	$-\sin x$	$x \in \mathbb{R}$

Tabelle der wichtigsten ABLEITUNGSREGELN

1	$(f+g)'$	$=$	$f' + g'$	*“Additivität”*	*“Linearität”*
2	$(\lambda f)'$	$=$	$\lambda f' \quad (\lambda \in \mathbb{R})$	*“Homogenität”*	
3	$(f \cdot g)'$	$=$	$f'g + fg'$	*“Produktregel”*	
4	$(f \circ g)'$	$=$	$(f' \circ g) \cdot g'$	*“Kettenregel”, ausführlich*	
	$\big(f(g(x))\big)'$	$=$	$f'(g(x)) \cdot g'(x)$		
5	$\left(\frac{f}{g}\right)'$	$=$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$	*“Quotientenregel”*	

Aufgabe:

(0) Lernen Sie diese Grundableitungen und Ableitungsregeln auswendig!
(Keine Punktwertung)

(i) Bestimmen Sie die Ableitung von h mit

$$h(x) = 13\sqrt[5]{x} + x \ln x^2 + \frac{e^x}{x}.$$

Erläutern Sie bei jeder Umformung, welche Ableitungsregeln bzw. Grundableitungen Sie benutzt haben.

(ii) Leiten Sie die Funktion h mit $h(x) = e^{2x}$

a) mit Hilfe der Produktregel

b) mit Hilfe der Kettenregel

ab. Machen Sie in jedem Fall kenntlich, wie die Funktionen f, g in der Produkt- bzw. Kettenregel zu definieren sind.

(iii) Leiten Sie die Quotientenregel aus der Produkt- und der Kettenregel her!

(iv) Leiten Sie aus der "gewöhnlichen" Produktregel (für 2 Faktoren) die folgende Produktregel für 3 Faktoren her!

$$(uvw)' = u'vw + uv'w + uvw'$$

(v) Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktion f:

a) $f(x) = \dfrac{x^2 - \ln x}{x}$

b) $f(x) = \dfrac{\sin x}{\cos x}$

c) $f(x) = x^2 (\sin 3x) e^{-x}$

---

2. *Tangentialebene II*
Gegeben sei die Funktion

$$f(x,y) = xy + e^{-x^2+xy}\ ,\ (x,y) \in \mathbb{R}^2$$

Bestimmen Sie die Gleichung der Tangentialebene an $Graph(f)$ im Punkt $(1,1)$.

---

3. *Partielle Ableitungen (Gradient und Hesse-Matrix)*
Bestimmen Sie alle partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung folgender Funktionen:

(i) $f(x_1, x_2) = 24x_1^2 - 8x_1x_2 + 5x_2^2$

(ii) $g(x,y) = e^{2x^2 - xy + y^2}$

(iii) $h(\alpha, \beta, \gamma) = \alpha\beta\gamma - \alpha^2 + \beta^2 \ln \gamma \qquad (\gamma > 0)$.

(Geben Sie diese in Form des Gradienten bzw. der Hesse-Matrix an.)

Kann man die Funktion f mit Hilfe von Gradient und/oder Hesse-Matrix vektoriell ausdrücken?

Abgabe: bis 21.05.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen