SERIE 2.4

1. *Grenzproduktivität*
   Die Produktionsfunktion eines Gutes x ist gegeben durch
   $$x = f(r_1, r_2) = 13r_1^2 - 3r_1 + 5r_1r_2 - 4r_2^2 + 7r_2 \ .$$
   - Bestimmen Sie die Grenzproduktivität bezüglich des Produktionsfaktors r_1 und des Produktionsfaktors r_2 .
   - Bestimmen und interpretieren Sie die Grenzproduktivitäten für $r_1 = 6$ und $r_2 = 4$.

---

2. *Partielle Ableitungen erster Ordnung*
   Drei Funktionen sollen durch die nachfolgenden Terme überall dort definiert werden, wo diese sinnvoll sind.
   1) $f(x, y) = \ln(e^x - e^{-y})$
   2) $g(x, y, z) = \dfrac{z \cdot \sin(xy)}{x + yz}$
   3) $h(x, y) = \dfrac{x^3y^5 - 7x}{\sqrt{6x + 4y}}$

   (a) Bestimmen Sie die jeweiligen Definitionsbereiche.
   (b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen erster Ordnung.
   (c) Bestimmen Sie die jeweiligen Definitionsbereiche der partiellen Ableitungen.

---

3. *Partielle Ableitungen höherer Ordnung*
   Durch die unter i) - iv) angegebenen Ausdrücke sollen Funktionen überall dort definiert werden, wo diese sinnvoll sind.
   i) $u(x, y) = 9x^8y^3 - 3x^3y^6$
   ii) $v(x, y) = 12y^2e^{3x^2}$
   iii) $k(x, y) = \left(x^2 + y^2\right) e^{xy}$
   iv) $m(x, y) = \sqrt{1 - x^2y}$

   (a) Bestimmen Sie die jeweiligen Definitionsbereiche.
   (b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen erster und zweiter Ordnung.
   Geben Sie auch die Definitionsbereiche der Ableitungen an !

---

b.w.

4. *Wiederholungsaufgabe Kettenregel*

Vorbemerkung:

Die Kettenregel der Differentialrechnung (für Funktionen einer Veränderlichen) lautet in "abstrakter" Form

$$(f(g(x)))' = f'\big(g(x)\big) \cdot g'(x).$$

Man kann sie z.B. wie folgt anwenden, um die Funktion h mit

$$h(x) = e^{\sqrt{x}}$$

an einer Stelle $x > 0$ abzuleiten:

1. *Man wählt einen Kandidaten für die Rolle der "äußeren Funktion" f; hier z.B.*

$$f(g) := e^g .$$

2. *Dann ergibt sich als "innere Funktion"*

$$g(x) := \sqrt{x}.$$

(Man vergewissere sich, daß alles stimmt:

$$h(x) = f(g(x))\ ).$$

3. *Man bestimmt die Ableitungen von äußerer und innerer Funktion:*

$$\begin{array}{lclcll} f'(g) & = & (e^g)' & = & e^g\,, & g \in \mathbb{R} \\ g'(x) & = & (\sqrt{x})' & = & \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,, & x > 0. \end{array}$$

4. *Nun folgt nach Kettenregel*

$$\begin{array}{lcccll} h'(x) & = & f'(g(x)) & \cdot & g'(x) & \\ & = & e^{g(x)} & \cdot & g'(x), & \textit{also} \\ \left(e^{\sqrt{x}}\right)' & = & e^{\sqrt{x}} & \cdot & \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\,. & \end{array}$$

Aufgabe:

(i) Man bestimme die Ableitung der Funktion h mit

$$h(x) = \ln(5x^3 + 2x^2 + x + 1) \qquad (x > 0)$$

mit Hilfe der Kettenregel nach dem vorangehenden Muster, etwa wie folgt:

1. *"Äußere Funktion" f:*
   $f(g) := \ldots$
2. *"Innere Funktion" g:*
   $g(x) := \ldots$
3. *Ableitungen:*
   $f'(g) = \ldots$
   $g'(x) = \ldots$
4. *Berechnung nach Kettenregel:*
   $h'(x) = \ldots$

(ii) Dasselbe für die Funktion h mit

$$h(x) = \frac{1}{1+e^{-x^2}} \quad (x \in \mathbb{R}).$$

(iii) Begründen Sie mit Hilfe der "einfachen" Kettenregel nach dem vorangehenden Muster, warum die "mehrfache" Kettenregel

$$\Big(f\big(g(h(x))\big)\Big)' = f'\big(g(h(x))\big) \cdot g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

gilt.

(iv) Leiten Sie durch mehrfache Anwendung der Kettenregel ab:

a) $\sin\left(1 + 4 \cdot \ln\left(1 + \sqrt{1+e^x}\right)\right)$

b) $\big(1 + \sin\left(1 + x^3\right)\big)^5$

Abgabe: bis 14.05.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen