SERIE 2.14

1. *Haushaltsnutzen*
Ein Haushalt, der zwei Güter X und Y zu den Preisen $p > 0$ und $q > 0$ erwerben kann, bewertet den subjektiven Nutzen beim Erwerb des Güterbündels (x, y) durch den Nutzenindex

$$U(x, y) = \sqrt{xy + 3x}\,, \quad x, y \geqslant 0\,.$$

Das Budget des Haushaltes betrage B Geldeinheiten und sei größer als $3q$.

(a) Ermitteln Sie die Nachfragen $x = x(B, p, q)$ und $y = y(B, p, q)$ des Haushaltes an den Gütern X bzw. Y als Funktionen der Einflußgrößen B, p und q. *(Lösungshinweis unten beachten!)*

(b) Wie hoch ist der größtmögliche Nutzen $U_{max} = U_{max}(B, p, q)$ des Haushaltes?

(c) Wie wirkt sich eine Erhöhung des Preises p für das Gut X auf die Nachfrage y an Gut Y aus?

(d) Läßt sich der Haushaltsnutzen (bei konstanten Preisen p und q) durch eine Verdoppelung des Budgets verdoppeln?

(e) Was geschieht mit Nachfragen und Maximalnutzen, wenn alle Preise und das Budget gleichzeitig verdoppelt werden?

Lösungshinweis: Wer die Aufgabe nur mit konkreten Zahlenwerten statt mit den Variablen B, p, q lösen kann, verwende durchweg die Zahlenwerte $B = 108, p = 3$ und $q = 12$.

---

2. *Homogene Funktionen*
Stellen Sie fest, welche der nachfolgenden Funktionen homogen sind, und ermitteln Sie ggf. deren Homogenitätsgrad:

1) $f(x, y) = x^2 + xy + y^2 \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2$
2) $g(x, y) = \frac{1}{x} + \frac{1}{y} \qquad (x \neq 0, y \neq 0)$
3) $h(x, y) = \sqrt{x + \sqrt{y}} \qquad (x, y \geqslant 0)$
4) $j(x, y) = (\alpha\sqrt{x} + \beta\sqrt{y})^{m/2} \qquad (x, y > 0)$ mit Parametern $m \in \mathbb{R}, \alpha \geqslant 0, \beta \geqslant 0, \alpha + \beta = 1$
5) $k(x, y) = x + |y| \qquad (x, y \in \mathbb{R})$
6) $l(x, y) = \ln(1 + x^2 + y^2) \qquad (x, y \in \mathbb{R})$.

---

3. *Komplexe Aufgabe*
Gegeben sei die Funktion f auf $D := [0, \infty) \times [0, \infty)$ durch

$$f(x, y) = 2x^2 + 3y + xy^2 \ .$$

(i) Stellen Sie fest, ob f als Modell für eine
  - (Gesamt-)Kostenfunktion
  - Produktionsfunktion
  - Nutzenfunktion

  dienen kann. (Legen Sie dazu zunächst selbst Kriterien fest, denen die o.g. Funktionen genügen sollen, und überprüfen Sie, ob f diesen Kriterien genügt.)

(ii) Ist f auf D oder einer konvexen Teilmenge $\tilde{D}$ von D konvex? (Wenn ja, bestimmen Sie die größtmögliche Menge $\tilde{D}$.)

(iii) Ermitteln Sie die Ableitung der durch die Gleichung

$$f(x, \phi(x)) = f(1, 6)$$

implizit gegebenen Funktion $\phi(x)$ an der Stelle $x = 1$.
(Implizite Differentiation)

(iv) Welche Höhenlinie von f enthält den Punkt $(1, 6)$?

(v) Wählt man die Inputgrößen x und y in Abhängigkeit von einem Parameter t gemäß

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{t} \\ y(t) &= \ln(1 + t) \ , \end{aligned}$$

entsteht eine neue Funktion g durch

$$g(t) := f(x(t), y(t)) \ , \ t \geq 0 \ .$$

Bestimmen Sie deren Ableitung $g'(t)$ mit Hilfe der Kettenregel.

(vi) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,y}$ von f bezüglich y allgemein (d.h., als Funktion von x und y) und speziell an der Stelle $(x, y) = (1, 6)$. Welche Interpretation hat der zuletzt gefundene Wert?

(vii) Ist f homogen (und falls ja, von welchem Grad)? (Begründung!)

---

4. *Elastizitäten*

Teil A

Die Nachfrage nach einem Gut X werde als Funktion des Preises durch

$$x(p) = \frac{1}{1 + p^2} \ , \quad p \geqslant 0 \, ,$$

beschrieben.

(i) Geben Sie die Elastizität $\varepsilon_x(p)$ der Nachfrage bezüglich des Preises p als Funktion von p an:

$\varepsilon_x(p) \quad = \quad \boxed{}$

(ii) Bei welchem Preis p_0 reagiert die Nachfrage proportional-elastisch?

$p_0 \quad = \quad \boxed{}$

(iii) Wie lautet die Elastizität ε_U der durch $U(p) = p\,x(p),\ p \geqslant 0$, definierten Umsatzfunktion bezüglich des Preises?

$\varepsilon_U(p) \quad = \quad \boxed{}$

(iv) Welchen Zahlenwert hat $\varepsilon_U(p)$ an der Stelle $p = 1$, und wie ist dieser zu interpretieren?

$\varepsilon_U(1) \quad = \quad \boxed{}$

Interpretation: ....

....

Teil B

Wir betrachten die durch

$$x(B,p,q) := \frac{B - 3p + 5q}{2p}$$

auf $D = (\,0,\infty\,)^3$ definierte Funktion.

(i) Ist x (als Funktion aller drei Variablen B,p,q) homogen?
Wenn ja, von welchem Grad?

☐ x ist nicht homogen

☐ x ist homogen, und zwar vom Grad ☐

? weiß nicht

(ii) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten von x bezüglich B, p und q (als Funktion aller drei Variablen).

$\varepsilon_{x,B}(B,p,q) \quad = \quad \boxed{}$

$\varepsilon_{x,p}(B,p,q) \quad = \quad \boxed{}$

$\varepsilon_{x,q}(B,p,q) \quad = \quad \boxed{}$

(iii) Ergänzen Sie: Es gilt $\varepsilon_{x,B} + \varepsilon_{x,p} + \varepsilon_{x,q} = 0$ aufgrund ....

....

....

Nebenrechnungen beifügen!

Abgabe: bis 23.07.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen