



SERIE 2.12

1. Numerus Clausus

Das Unternehmen “Numerus” erzielt bei der Ausbringung von x bzw. y Mengeneinheiten (ME) zweier Güter X bzw. Y einen Gewinn in Höhe von

$$G(x, y) = 5xy + x + 17y - \frac{x^4}{12} - \frac{y^4}{12} - \frac{10x^2}{3} - 3y^2 - \frac{7}{12}$$

Geldeinheiten (GE). Es können - unabhängig voneinander - bis zu 26 ME des Gutes X und bis zu 38 ME des Gutes Y hergestellt werden. Um ein Gutachten gebeten, teilt die Unternehmensberatung “Clausus” mit, der höchstmögliche Gewinn sei mit dem Produktionsplan $(x^*, y^*) = (2, 3)$ - und nur mit diesem - zu erzielen. Allerdings fehlen Hinweise auf den Maximalgewinn und das angewendete Berechnungsverfahren.

Die Geschäftsleitung von “Numerus” wendet sich daher an Sie als Hörer von “Mathematik B für Wirtschaftswissenschaftler” mit der Bitte um eine unabhängige gutachterliche Prüfung des Ergebnisses von “Clausus”.

In ihrem Gutachten sind folgende Fragen zu beantworten:

1. Ist der Produktionsplan $(x^*, y^*) = (2, 3)$ tatsächlich gewinnoptimal?
2. Gibt es weitere gewinnoptimale Produktionspläne?
3. Wie groß ist der größtmögliche Gewinn G_{max} ?
4. Fügen Sie Ihrem Gutachten die notwendigen Rechnungen bei und erläutern Sie ihre Vorgehensweise, insbesondere: Welche Bedingung(en) ist(sind) für die (globale) Gewinnoptimalität des Punktes $(x^*, y^*) = (2, 3)$
 - a) notwendig?
 - b) hinlänglich?

Sind diese Bedingungen erfüllt?

2. Vorbereitungsaufgabe "Elastizitäten"

Es sei $f : D \rightarrow \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}$, eine differenzierbare Funktion. Der Ausdruck

$$\varepsilon_f(x) := \frac{xf'(x)}{f(x)}, \text{ soweit definiert,}$$

heißt "Elastizität von f an der Stelle x " ($x \in D$).

Berechnen Sie diese als Funktion von x für:

- (a) $f(x) = 10 - 2(x - 5)^2$ $D = \mathbb{R}$
- (b) $g(x) = 3\sqrt{x}$ $D = [0, \infty)$
- (c) $h(x) = 5e^{2x}$ $D = \mathbb{R}$
- (d) $j(x) = \ln(1 + x)$ $D = (-1, \infty)$
- (e) $k(x) = \sqrt{1 + x^2}$ $D = \mathbb{R}$

Bestimmen Sie dabei jeweils auch die Definitionsbereiche von ε und (außer im Fall (a) und (d)) diejenigen Teilmengen von D_ε , auf denen $|\varepsilon(x)| > 1$, $|\varepsilon(x)| = 1$ bzw. $|\varepsilon(x)| < 1$ gilt.

Abgabe: bis 09.07.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen