



SERIE 2.10

1. Ankreuzen Definitheit und stat. Punkte

Eine Funktion $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ besitze genau einen stationären Punkt mit zugehöriger Hesse – Matrix H . Entscheiden Sie in den nachfolgenden Beispielen -soweit möglich- über die Definitheit von H und die Art des stationären Punktes. (**Alle** zutreffenden Felder ankreuzen!)

H	Definitheit:	Art des stat. Punktes	Punkte
$\begin{pmatrix} -2 & -1 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> < 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\succ 0$ <input type="checkbox"/> $\succcurlyeq 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> < 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\succ 0$ <input type="checkbox"/> $\succcurlyeq 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> < 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\succ 0$ <input type="checkbox"/> $\succcurlyeq 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> < 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\succ 0$ <input type="checkbox"/> $\succcurlyeq 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 6 & 6 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> < 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\succ 0$ <input type="checkbox"/> $\succcurlyeq 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 10 & 12 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> < 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\succ 0$ <input type="checkbox"/> $\succcurlyeq 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> < 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\succ 0$ <input type="checkbox"/> $\succcurlyeq 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	$\frac{1}{2}$ $\frac{1}{2}$
$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$	<input type="checkbox"/> < 0 <input type="checkbox"/> > 0 <input type="checkbox"/> $= 0$ <input type="checkbox"/> $\succ 0$ <input type="checkbox"/> $\succcurlyeq 0$ <input type="checkbox"/> $\lambda 0$ <input type="checkbox"/> $?$	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> k.B. <input type="checkbox"/> $?$	2 1

Legende:

\succ positiv	} definit
\prec negativ	
\succcurlyeq positiv	} semidefinit
\succcurlyeq negativ	
$=$ sowohl \succcurlyeq als auch \preccurlyeq	
λ indefinit	

SP	(verallg.) Sattelpunkt
MAX	(lokaler) Maximumpunkt
MIN	(lokaler) Minimumpunkt
k.B.	keine Beurteilung möglich ohne Zusatz – Info
?	weiß nicht

Hinweis zur Bewertung:

- Eine *richtige* Antwort ergibt die angegebene Punktzahl.
- Eine *falsche* Antwort ergibt entsprechend viele Minuspunkte.
- “gar nichts ankreuzen” ergibt ebenfalls Minuspunkte.
- “weiß nicht” ergibt jeweils 0 Punkte.

Daher: Im Zweifelsfall “weiß nicht” ankreuzen.

AUSSERDEM: NEBENRECHNUNGEN BITTE AUF GESONDERTEM BLATT BEIFÜGEN!

2. *Lokales Maximum und Minimum*

Wir betrachten die durch

$$f(x, y) = 4x^4 - 8xy + \frac{2}{27}y^2 \quad \text{für } (x, y) \in \mathbb{R}^2$$

definierte Funktion f .

- (a) Berechnen Sie den Gradienten $\nabla f = (f_x, f_y)$ und die Hesse-Matrix

$$H := \nabla^2 f = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{xy} \\ f_{yx} & f_{yy} \end{pmatrix} \text{ von } f.$$

- (b) Berechnen Sie alle stationären Punkte von f und klassifizieren Sie diese dahingehend, ob ein lokaler Minimum- bzw. Maximumpunkt oder ein (verallgemeinerter) Sattelpunkt vorliegt oder evtl. anhand der Hesse-Matrix allein eine Beurteilung nicht möglich ist.

- (c) Ist f auf einem Teil des Definitionsbereiches konkav/konvex? Wenn ja, auf welchem?

3. *Lokale Extrema ankreuzen I*

Auf \mathbb{R}^2 werde die Funktion f

$$f(x, y) = x^4 - 4x^2y^2 + xy^2$$

betrachtet. Diese besitzt $(0, 0)$ als stationären Punkt. Stellen Sie fest, ob weitere stationäre Punkte existieren, und klassifizieren Sie diese mit Hilfe der Hesse – Matrix bzw. durch Analyse von Vertikalschnitten (z.B. “ $y = ax$ ” für geeignete Konstanten a).

Kreuzen Sie die zutreffenden Felder an:

Der Punkt	ist stationärer Punkt	und zwar (falls JA):	(falls NEIN):	Punkte
$(0, 0)$	<input type="checkbox"/> JA	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1
$(\frac{1}{8}, -\frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{8})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(-\frac{1}{4}, \frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1
$(0, \frac{1}{4})$	<input type="checkbox"/> JA <input type="checkbox"/> NEIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> SP <input type="checkbox"/> MAX <input type="checkbox"/> MIN <input type="checkbox"/> ?	<input type="checkbox"/> Entfällt	1 1

Hinweis zur Bewertung:

- Eine *richtige* Antwort ergibt die angegebene Punktzahl.
- Eine *falsche* Antwort ergibt entsprechend viele Minuspunkte.
- “gar nichts ankreuzen” ergibt ebenfalls Minuspunkte.
- “weiß nicht” ergibt jeweils 0 Punkte.

Daher: Im Zweifelsfall “weiß nicht” ankreuzen.

AUSSERDEM: NEBENRECHNUNGEN BITTE AUF GESONDERTEM BLATT BEIFÜGEN!

Abgabe: bis 25.06.2004 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen