SERIE 2.6

1. *Definitheit (Eigenwerte)*
   Untersuchen Sie die folgenden Matrizen auf Definitheit !

$$A = \begin{pmatrix} 108 & 21 \\ 21 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 49 & -7 \\ -7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} -20 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$D = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 108 & -9 \\ -9 & 1 \end{pmatrix}$$

---

2. *Ökonomische "Eignung"*
   Nach Auffassung eines Ökonomen kann eine Funktion $f : [0, \infty) \times [0, \infty) \to I\!R$ als

   (a) (Gesamt-) Kostenfunktion
   (b) Nutzenfunktion

   interpretiert werden, wenn sie monoton wachsend ist und weiterhin gilt:

   (a) $f(0,0) \geqslant 0$
   (b) f ist konkav.

   Ist es möglich, in dem Ansatz

$$f(x,y) = ax^2 + bxy + y^2 + 11$$

   die Konstanten $a \neq 0$ und $b \in I\!R$ so zu wählen, daß f als

   (a) Kostenfunktion
   (b) Nutzenfunktion

   interpretierbar ist?

   (Falls JA: Wie sind die Konstanten a, b zu wählen?
   Falls NEIN: Begründung!)

---

3. $*$-Aufgabe:
Konvexität
Es sei $D \subset \mathbb{R}^n$ eine nichtleere konvexe Menge.

Zeigen Sie

(i) Sind $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen und $\lambda \geq 0, \mu \geq 0$, dann ist auch die Funktion $\lambda f + \mu g$ konvex.

(ii) Es seien $a, b : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ konvexe Funktionen (einer Veränderlichen!). Dann ist die durch $S(x, y) := a(x) + b(y)$ auf $\mathbb{R}^2$ definierte Funktion S konvex.

(iii) Sind $\psi : D \to \mathbb{R}$ eine konvexe und $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende konvexe Funktion, dann ist die durch

$$\tau(\underline{x}) := \varphi \circ \psi(\underline{x}) := \varphi(\psi(\underline{x})), \quad \underline{x} \in D,$$

definierte Funktion ebenfalls konvex.
(Die Aussage ist falsch, wenn nur gefordert wird, dass φ konvex ist.)

Untersuchen Sie mit Hilfe von (i) - (iii) die folgenden Funktionen auf $\mathbb{R}$ auf Konvexität:

a) $h(x, y) = 24(x + y)^2 - 11\sqrt{y}$

b) $\tau(x, y) = e^{x^2 + y^4}$

Abgabe: bis 10.06.2003 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: ab 18.06.2003
in den Übungsgruppen