SERIE 2.5

1. *Elementares Maximumproblem*
   Auf $D = I\!R^2$ werde die Funktion f mit

   $$f(\underline{x}) = f(x, y) = 500 - 5(x-3)^2 - 6xy - 2(y-4)^2$$

   betrachtet.

   (i) Man bestimme $\nabla f = \operatorname{grad} f$ (als Funktion von $\underline{x} = (x, y)$).

   (ii) Man bestimme alle Punkte $\underline{x}^* = (x^*, y^*) \in D$, für die gilt $\nabla f(\underline{x}^*) = 0$.
   Bemerkung: *Ein solcher Punkt heißt "stationärer Punkt" von f.*
   Hinweis:
   - *Die o.g. Funktion f besitzt genau einen stationären Punkt.*
   - *Um diese zu finden: Gradient gleich Nullvektor setzen, Koordinaten errechnen.*
   - *Dabei ist ein (einfaches) lineares Gleichungssystem zu lösen.*

   (iii) Man berechne die Hesse – Matrix $H = \nabla^2 f$.
   Anmerkung: *H hängt nicht von $\underline{x} = (x, y)$ ab.*

   (iv) Eine reelle Zahl λ heißt *Eigenwert* von H, wenn gilt $\det(H - \lambda \cdot I) = 0$.
   H besitzt zwei Eigenwerte. Berechnen Sie diese!

   (v) Erarbeiten Sie eine Vermutung: f besitzt im o.g. Punkt $\underline{x}^*$ ein Maximum/Minimum/weder – noch ...
   Tip: *Betrachten Sie die Vertikalschnitte $x = x^*$ und $y = y^*$, wobei x^* und y^* die Koordinaten des stationären Punktes aus Teilaufgabe (ii) sind.*

---

2. *Vorbereitungsaufgabe "Elastizitäten"*
   Es sei $f : D \to I\!R$, $D \subset I\!R$, eine differenzierbare Funktion. Der Ausdruck

   $$\varepsilon_f(x) := \frac{x f'(x)}{f(x)}, \text{ soweit definiert,}$$

   heißt "Elastizität von f an der Stelle x" $(x \in D)$.
   Berechnen Sie diese als Funktion von x für:

   (a) $f(x) = 10 - 2(x-5)^2 \qquad D = I\!R$
   (b) $g(x) = 3\sqrt{x} \qquad D = [\,0, \infty\,)$
   (c) $h(x) = 5e^{2x} \qquad D = I\!R$
   (d) $j(x) = \ln(1 + x) \qquad D = (\,-1, \infty\,)$
   (e) $k(x) = \sqrt{1 + x^2} \qquad D = I\!R$

   Bestimmen Sie dabei jeweils auch die Definitionsbereiche von ε und (außer im Fall (a) und (d)) diejenigen Teilmengen von D_ε, auf denen $|\,\varepsilon(x)\,| > 1$, $|\,\varepsilon(x)\,| = 1$ bzw. $|\,\varepsilon(x)\,| < 1$ gilt.

Abgabe: bis 03.06.2003 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: ab 11.06.2003
in den Übungsgruppen