SERIE 2.10

1. *Funktionsanalyse*
Auf $D = \mathbb{R}^2$ werde die Funktion f mit

$$f(x,y) = 6xy - x^2y - 3y^3$$

betrachtet.

I. Kreuzen Sie **alle** Ihrer Meinung nach zutreffenden Antworten an:

a) Der Gradient f' von f lautet $f'(x,y) = \ldots$

$[\,6y + 2xy\,,\ 6x - 9y^2 - x^2\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$[\,(6-2x)y\,,\ x(6-x) - 9y^2\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$[\,(6y-2x)y\,,\ 6x - 3x^2 - 9y^2\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$[\,-2xy + 6y\,,\ x^2 - 9y^2 - 6x\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$[\,2(3y - xy)\,,\ 6x - (x^2 + 9y^2)\,]$	R	F	?	$\frac{1}{2}$

b) Die Hesse-Matrix f'' von f lautet ...

$\begin{bmatrix} -3y & 6-2x \\ 6-2x & -18y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$2 \cdot \begin{bmatrix} -y & 3-x \\ 3-x & -9y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$2 \cdot \begin{bmatrix} -y & 6-x \\ 6-x & 9y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\begin{bmatrix} -2y & 6+x \\ 6+x & -18y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\begin{bmatrix} -2y & -2x+6 \\ -2x+6 & -18y \end{bmatrix}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$

c)

Der Punkt...	ist stationärer Punkt von f		falls ja, und zwar:		falls nein:	
$[3,-1]$	JA / NEIN / ?	$\frac{1}{2}$	SP / MAX / MIN / k.B. / ?		Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[-3,-1]$	JA / NEIN / ?	$\frac{1}{2}$	SP / MAX / MIN / k.B. / ?		Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[-3,1]$	JA / NEIN / ?	$\frac{1}{2}$	SP / MAX / MIN / k.B. / ?		Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[3,1]$	JA / NEIN / ?	$\frac{1}{2}$	SP / MAX / MIN / k.B. / ?		Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[0,1]$	JA / NEIN / ?	$\frac{1}{2}$	SP / MAX / MIN / k.B. / ?		Entfällt	$\frac{1}{2}$

$[1,0]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?	Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[0,0]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?	Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[6,3]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?	Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[0,3]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?	Entfällt	$\frac{1}{2}$
$[6,0]$	JA	NEIN	?	$\frac{1}{2}$	SP	MAX	MIN	k.B.	?	Entfällt	$\frac{1}{2}$

II. Analysieren Sie die Vorzeichen der Hesse-Determinanten $H_1(x,y) = f_{xx}(x,y)$ und $H_2(x,y) = \det f''(x,y)$ in Abhängigkeit von x und y.

d) Es gilt $H_1(x,y) > 0$

$\Leftrightarrow \quad x > 0$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad y > 3$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad y < 0$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad y < -1$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad xy < 0$	R	F	?	$\frac{1}{2}$

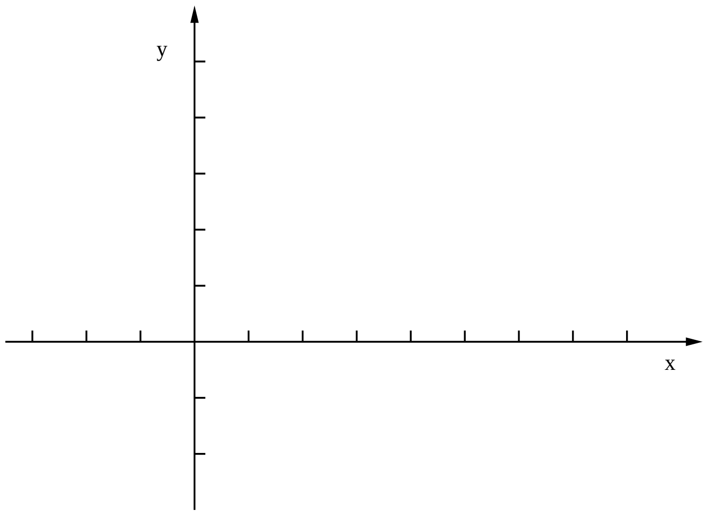
e) Es gilt $H_2(x,y) > 0$

$\Leftrightarrow \quad \lvert y\rvert > \dfrac{\lvert x-3\rvert}{3}$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad \left(y > \dfrac{\lvert x-3\rvert}{3} \text{ oder } y < -\dfrac{\lvert x-3\rvert}{3}\right)$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad \left(y > \dfrac{x-3}{3} \text{ oder } y < -\dfrac{x-3}{3}\right)$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow \quad \left(y > \dfrac{x-3}{3} \text{ für } x \geq 3 \text{ oder } y < -\dfrac{x-3}{3} \text{ für } x < 3\right)$	R	F	?	$\frac{1}{2}$
$\Leftrightarrow$ niemals	R	F	?	$\frac{1}{2}$

f) Tragen Sie "möglichst große" Mengen $D^{\succcurlyeq}$, $D^{\preccurlyeq}$ und $D^{\Yup}$ in das nachfolgende Diagramm derart ein, daß

- f auf $D^{\succcurlyeq}$ konvex ist (schraffiert:)
- f auf $D^{\preccurlyeq}$ konkav ist (nicht schraffiert:)
- f auf $D^{\Yup}$ indefinit ist (grau:)

5



III. Wir betrachten die Funktion f jetzt nur noch auf dem "ökonomischen" Definitionsbereich $D_{oec} := [0,8] \times [0,3]$.

g) Ist f auf D_{oec} beschränkt? $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{\textbf{?}}$ $\frac{1}{2}$

h) Besitzt f auf D_{oec} ein lokales Maximum? $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{\textbf{?}}$ $\frac{1}{2}$

Wenn ja: z.B. an der Stelle $(x, y) = \boxed{}$ mit $f(x, y) = \boxed{}$

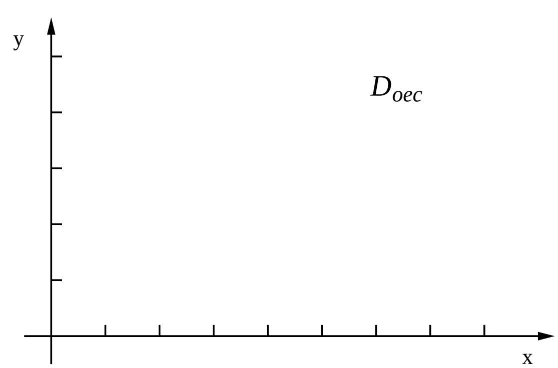
1

Wenn nein, Begründung ....

i) Ist f auf D_{oec} konkav? $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{\textbf{?}}$ $\frac{1}{2}$

j) Ist es erforderlich, bei der Suche nach dem globalen (=absolut) Maximum von f die Ränder von D_{oec} zu untersuchen? $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{\textbf{?}}$ $\frac{1}{2}$

k) Skizzieren Sie die Höhenlinie "$f(x, y) = 0$" in D_{oec} in nachfolgendem Diagramm:



2

l) Schraffieren Sie diejenige Teilmenge von D_{oec}, auf der gilt: $f(x, y) \geq 0$. 1

m) Eignet sich f auf D_{oec} Ihrer Meinung nach als Modell für eine

- Produktionsfunktion $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{\textbf{?}}$,denn 1

....

. . . .

- Kostenfunktion $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{?}$,denn 1

. . . .

. . . .

- Gewinnfunktion $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{?}$,denn 1

. . . .

. . . .

- Nutzenfunktion $\boxed{\text{JA}}$ $\boxed{\text{NEIN}}$ $\boxed{?}$,denn 1

. . . .

. . . .

---

2. *Komplexe Aufgabe*
Gegeben sei die Funktion f auf $D := [0,\infty) \times [0,\infty)$ durch

$$f(x,y) = 2x^2 + 3y + xy^2 \ .$$

(i) Stellen Sie fest, ob f als Modell für eine
- (Gesamt-)Kostenfunktion
- Produktionsfunktion
- Nutzenfunktion

dienen kann. (Legen Sie dazu zunächst selbst Kriterien fest, denen die o.g. Funktionen genügen sollen, und überprüfen Sie, ob f diesen Kriterien genügt.)

(ii) Ist f auf D oder einer konvexen Teilmenge $\tilde{D}$ von D konvex? (Wenn ja, bestimmen Sie die größtmögliche Menge $\tilde{D}$.)

(iii) Ermitteln Sie die Ableitung der durch die Gleichung

$$f(x, \phi(x)) = f(1,6)$$

implizit gegebenen Funktion $\phi(x)$ an der Stelle $x = 1$.
(Implizite Differentiation)

(iv) Welche Höhenlinie von f enthält den Punkt $(1,6)$?

(v) Wählt man die Inputgrößen x und y in Abhängigkeit von einem Parameter t gemäß

$$\begin{aligned} x(t) &= \sqrt{t} \\ y(t) &= \ln(1+t) \ , \end{aligned}$$

entsteht eine neue Funktion g durch

$$g(t) := f(x(t), y(t)) \ , \ t \geq 0 \ .$$

Bestimmen Sie deren Ableitung $g'(t)$ mit Hilfe der Kettenregel.

(vi) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten $\varepsilon_{f,y}$ von f bezüglich y allgemein (d.h., als Funktion von x und y) und speziell an der Stelle $(x,y) = (1,6)$. Welche Interpretation hat der zuletzt gefundene Wert?

(vii) Ist f homogen (und falls ja, von welchem Grad)? (Begründung!)

---

3. *Implizite Differentiation*
Im $\mathbb{R}^2$ wird durch die Gleichung $x^2 + xy + y^2 = 112$ eine Kurve definiert, der der Punkt $(x_0, y_0) = (4, 8)$ angehört.

(i) Welche Steigung hat die Tangente an diese Kurve im Punkt (x_0, y_0)?

(ii) Gibt es weitere Punkte, in denen die Tangente an diese Kurve dieselbe Steigung hat?

(iii) Geben Sie alle Punkte auf der Kurve mit "waagerechter" Tangente an.

(iv) $(*)-$ Aufgabe: Ist die Kurve in einer Umgebung von (x_0, y_0) (die ggf. sehr klein sein kann) konvex oder konkav?

Hinweis: Die Tangentensteigungen werden - wie üblich - auf das $(x, y)-$Koordiantensystem bezogen; d.h., die Tangente wird als Funktion von x gedeutet.

Abgabe: bis 22.7.2003 13.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: ab 30.07.2003
in den Übungsgruppen