Blatt 4

1. *Lineare Hülle*
Vorbemerkung: Es sei $\mathscr{M}$ ein linearer Raum und $M \subset \mathscr{M}$ eine *nichtleere* Teilmenge von $\mathscr{M}$. Die Menge aller Linearkombinationen je endlich vieler Elemente von M heißt *lineare Hülle* von M (symbolisch: $\mathscr{L}(M)$). Ist M eine endliche Menge - etwa $M = \{\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n\}$ -, schreiben wir kurz $\mathscr{L}(\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n)$ statt $\mathscr{L}(\{\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n\})$.

Zeigen Sie:

(i) Die hier gegebene Definition ist mit der in der Vorlesung gegebenen konsistent, d.h., für $M = \{\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n\}$ gilt
$$\mathscr{L}(M) = \left\{\lambda_1 \underline{a}^1 + \ldots + \lambda_n \underline{a}^n \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}.$$

(ii) Für jede Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathscr{M}$ ist $\mathscr{L}(M)$ linearer Teilraum von $\mathscr{M}$.

(iii) Für jede Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathscr{M}$ gilt $\mathscr{L}(\mathscr{L}(M)) = \mathscr{L}(M)$.

(iv) Ist $M \subset \mathscr{M}$ linearer Teilraum von $\mathscr{M}$, so gilt $\mathscr{L}(M) = M$.

---

2. *Lineare Teilräume*
Definition:
Es sei $\mathscr{M}$ ein linearer Raum. Eine Teilmenge $M \subset \mathscr{M}$ heißt *linearer Teilraum von* $\mathscr{M}$, wenn M - versehen mit den aus $\mathscr{M}$ ererbten Operationen "+" (Addition) und "$\cdot$" (Multiplikation mit einem Skalar) - selbst ein linearer Raum ist.

Es gilt folgender
Satz:
Eine nichtleere Teilmenge M eines linearen Raumes $\mathscr{M}$ ist genau dann linearer Teilraum, wenn gilt
$$x, y \in M,\ \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad \Longrightarrow \quad \alpha x + \beta y \in M\,.$$

Aufgabe:
Untersuchen Sie, ob folgende Mengen M lineare Teilräume des (Grund-) Raumes $\mathscr{M}$ sind:

(i) $M_1 :\widehat{=}$ Menge aller oberen (n,n)-Dreiecksmatrizen als Teilmenge von $\mathscr{M} = \mathbb{R}^{n,n}$

(ii) $M_2 :\widehat{=}$ Menge aller invertierbaren (n,n)-Matrizen als Teilmenge von $\mathscr{M} = \mathbb{R}^{n,n}$

(iii) die volle Einheitskreisscheibe im $\mathbb{R}^2$: $\quad M_3 := \left\{\underline{x} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, ||\underline{x}|| \leqslant 1\right\} \quad \subset \quad \mathbb{R}^2 =: \mathscr{M}$
