



Blatt 1

1. *Relationen Vorbemerkung: Um Beziehungen zwischen Objekten – z.B. die Beziehung “ $3 \leq 7$ ” zwischen 3 und 7 – zu beschreiben, bedient man sich des Begriffs der “Relation”.*

- Es seien $M, N \neq \emptyset$ beliebige Mengen.
Jede Teilmenge $R \subset M \times N$ des kartesischen Produktes $M \times N$ heißt eine *Relation* (in $M \times N$).
Im Fall $M = N$ nennt man R kurz eine *Relation* (in M).

So werden in $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ durch

$$(x, y) \in KG \quad :\Leftrightarrow \quad x \leq y ,$$

$$(x, y) \in K \quad :\Leftrightarrow \quad x < y ,$$

$$(x, y) \in D7 \quad :\Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z} : x - y = 7k$$

Relationen definiert.

(($x, y) \in D7$ bedeutet, daß x und y bei Division durch 7 denselben (nichtnegativen) Rest besitzen.)

Es zeigt sich, daß folgende Eigenschaften für Relationen von Interesse sind:

- Eine Relation $R \subset M \times M$ heißt
- *reflexiv*, falls gilt $x \in M \Rightarrow (x, x) \in R$
 - *symmetrisch*, falls gilt $(x, y) \in R \Rightarrow (y, x) \in R$
 - *antisymmetrisch*, falls gilt $(x, y) \in R, (y, x) \in R \Rightarrow x = y$
 - *transitiv*, falls gilt $(x, y) \in R, (y, z) \in R \Rightarrow (x, z) \in R$.

Aufgabe a) Stellen Sie fest, über welche dieser Eigenschaften die oben eingeführten Relationen KG, K und $D7$ verfügen.

- Eine reflexive und transitive Relation heißt *Äquivalenzrelation*, wenn sie symmetrisch ist, und *Ordnungsrelation*, wenn sie antisymmetrisch ist.

Aufgabe b) Stellen Sie fest, ob sich unter den oben genannten Relationen Äquivalenz- oder Ordnungsrelation(en) befinden.

Anwendungshinweis: “ \leq ” definiert eine Ordnungsrelation zwischen Matrizen.

2. *Inverse*

Es seien A und B beliebige (n, n) -Matrizen. Zeigen Sie:

- (a) Falls A eine Inverse besitzt, so ist diese eindeutig bestimmt.
 - (b) Falls sowohl A als auch B invertierbar sind, so auch das Produkt AB , und es gilt $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
 - (c) Falls A eine Diagonalmatrix ist, existiert genau dann die Inverse A^{-1} , wenn kein Diagonalelement Null ist.
-