SERIE 1.6

1. *lineare Unabhängigkeit*

   Man untersuche, ob die folgenden Vektoren linear unabhängig sind (mit Begründung):

   a) $\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1/2 \\ 3/4 \end{pmatrix}$

   b) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

   c) $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 9 \\ 3 \end{pmatrix}$

   d) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

   e) $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$

   f) $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$

---

2. *Richtig/Falsch*

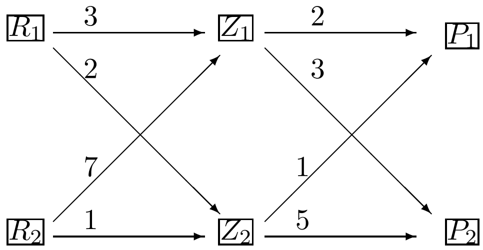
   Welche der folgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? Widerlegen und korrigieren Sie die von Ihnen für **falsch** gehaltenen Aussagen!

   1) Die Vektoren $\underline{r}^1, \ldots, \underline{r}^n \in \mathbb{R}^m$ sind linear unabhängig, wenn die Gleichung $c_1\underline{r}^1 + \cdots + c_n\underline{r}^n = 0$ wenigstens die Lösung $c_1 = \cdots = c_n = 0$ hat.
   2) Die Vektoren $\underline{r}^1, \ldots, \underline{r}^n \in \mathbb{R}^m$ sind linear unabhängig, wenn sich höchstens einer dieser Vektoren als Linearkombination der übrigen schreiben läßt.
   3) Falls sich unter den Vektoren $\underline{r}^1, \ldots, \underline{r}^n \in \mathbb{R}^m$ der Nullvektor befindet, sind diese linear abhängig.
   4) Im Fall $n > m$ besitzt die Gleichung $c_1\underline{r}^1 + \cdots + c_n\underline{r}^n = 0$ für gegebene Vektoren $\underline{r}^1, \ldots, \underline{r}^n \in \mathbb{R}^m$ stets eine Lösung $\underline{c}^T = (c_1, \ldots, c_n) \neq 0$
   5) Wenn die Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{y}$ linear unabhängig sind und die Vektoren $\underline{y}$ und $\underline{z}$ ebenfalls linear unabhängig sind, müssen auch die Vektoren $\underline{x}$ und $\underline{z}$ linear unabhängig sein.
   6) Sind die Vektoren $\underline{x}, \underline{y}, \underline{z}$ linear abhängig, so sind zwei dieser Vektoren parallel.

---

3. *Ökonomische Deutung von Basen*

Gegeben seien der Gozintograph einer zweistufigen Produktion:



sowie ein Produktionsprogramm $\underline{p}^T = (10, 12)$.

a) Stellen Sie die Matrizen V^{01} und V^{12} auf, die den direkten spezifischen Materialverbrauch beim Übergang von Stufe 0 zu Stufe 1 bzw. von Stufe 1 zu Stufe 2 beschreiben.

b) Ermitteln Sie die Vektoren $\underline{z}$ und $\underline{r}$ der für die Endproduktion $\underline{p}$ benötigten Zwischenprodukte bzw. Rohstoffe.

c) Zeigen Sie, daß

   i) die Spalten von V^{01} eine Basis $\underline{\underline{b}} = (\underline{b}^1, \underline{b}^2)^T$

   ii) die Spalten von V^{12} eine Basis $\underline{\underline{c}} = (\underline{c}^1, \underline{c}^2)^T$

   iii) die Spalten von $V := V^{01}V^{12}$ eine Basis $\underline{\underline{d}} = (\underline{d}^1, \underline{d}^2)^T$

   des $\mathbb{R}^2$ bilden.

d) Geben Sie die Koeffizienten von

   i) $\underline{z}$ bezüglich $\underline{\underline{c}}$

   ii) $\underline{r}$ bezüglich $\underline{\underline{b}}$

   iii) $\underline{r}$ bezüglich $\underline{\underline{d}}$

   an und interpretieren Sie diese ökonomisch.

Abgabe: bis 07.12.2004 9.00 Uhr
Box 114, 117 (grün) auf D1-Flur

Rückgabe: eine Woche später
in den Übungsgruppen