Blatt 5

1. *Lineare Hülle*
Vorbemerkung: Es sei $\mathscr{M}$ ein linearer Raum und $M \subset \mathscr{M}$ eine *nichtleere* Teilmenge von $\mathscr{M}$. Die Menge aller Linearkombinationen je endlich vieler Elemente von M heißt *lineare Hülle* von M (symbolisch: $\mathscr{L}(M)$). Ist M eine endliche Menge - etwa $M = \{\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n\}$ -, schreiben wir kurz $\mathscr{L}(\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n)$ statt $\mathscr{L}(\{\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n\})$.

Zeigen Sie:

(i) Die hier gegebene Definition ist mit der in der Vorlesung gegebenen konsistent, d.h., für $M = \{\underline{a}^1, \ldots, \underline{a}^n\}$ gilt

$$\mathscr{L}(M) = \left\{\lambda_1 \underline{a}^1 + \ldots + \lambda_n \underline{a}^n \,\middle|\, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}\right\}.$$

(ii) Für jede Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathscr{M}$ ist $\mathscr{L}(M)$ linearer Teilraum von $\mathscr{M}$.

(iii) Für jede Teilmenge $\emptyset \neq M \subset \mathscr{M}$ gilt $\mathscr{L}(\mathscr{L}(M)) = \mathscr{L}(M)$.

(iv) Ist $M \subset \mathscr{M}$ linearer Teilraum von $\mathscr{M}$, so gilt $\mathscr{L}(M) = M$.

---

2. *Fragen zur linearen Hülle*
Es seien $\mathscr{M}$ ein linearer Raum, $\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ beliebige Vektoren aus $\mathscr{M}$ und E und F beliebige nichtleere Teilmengen von $\mathscr{M}$.
Welche der nachfolgenden Aussagen sind richtig, welche falsch? (Begründung/Gegenbeispiele auf einem Beiblatt beifügen.)

(i)	$\mathscr{L}(\underline{a}, \underline{b}) = \mathscr{L}(\underline{a}, \underline{c}) \quad \Rightarrow \quad \underline{a}, \underline{b}, \underline{c}$ sind linear abhängig	R	F	**?**
(ii)	$\mathscr{L}(\underline{a}, \underline{b}) = \mathscr{L}(\underline{a}, \underline{b}, \underline{c}) \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}(\underline{a}, \underline{b}) = \mathscr{L}(\underline{a}, \underline{c})$	R	F	**?**
(iii)	$\mathscr{L}(\underline{a} + \underline{b}, \underline{a} - \underline{b}) \quad = \quad \mathscr{L}(\underline{a}, \underline{b})$	R	F	**?**
(iv)	$\mathscr{L}(\underline{a}, \underline{b}) \quad = \quad \mathscr{L}(\underline{a}) \cup \mathscr{L}(\underline{b})$	R	F	**?**
(v)	$E \subset F \quad \Rightarrow \quad \mathscr{L}(E) \subset \mathscr{L}(F)$	R	F	**?**
(vi)	$\mathscr{L}(E \cap F) \quad = \quad \mathscr{L}(E) \cap \mathscr{L}(F)$	R	F	**?**
