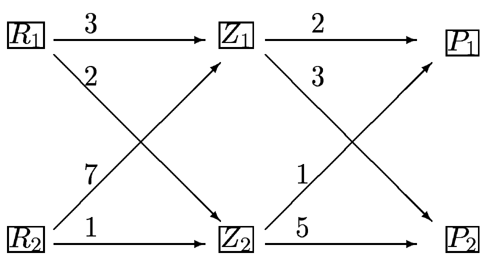
UGH Paderborn, FB 17
– Dietz –

ECO RSYS

WS 2002/03

SERIE 1.10

1. Gegeben seien der Gozintograph einer zweistufigen Produktion:



sowie ein Produktionsprogramm $\underline{p}^T = (10, 12)$.

a) Stellen Sie die Matrizen V^{01} und V^{12} auf, die den direkten spezifischen Materialverbrauch beim Übergang von Stufe 0 zu Stufe 1 bzw. von Stufe 1 zu Stufe 2 beschreiben.

b) Ermitteln Sie die Vektoren $\underline{z}$ und $\underline{r}$ der für die Endproduktion $\underline{p}$ benötigten Zwischenprodukte bzw. Rohstoffe.

c) Zeigen Sie, daß

i) die Spalten von V^{01} eine Basis $\underline{\underline{b}} = (\underline{b}^1, \underline{b}^2)^T$

ii) die Spalten von V^{12} eine Basis $\underline{\underline{c}} = (\underline{c}^1, \underline{c}^2)^T$

iii) die Spalten von $V := V^{01}V^{12}$ eine Basis $\underline{\underline{d}} = (\underline{d}^1, \underline{d}^2)^T$

des $\mathbb{R}^2$ bilden.

d) Geben Sie die Koeffizienten von

i) $\underline{z}$ bezüglich $\underline{\underline{c}}$

ii) $\underline{r}$ bezüglich $\underline{\underline{b}}$

iii) $\underline{r}$ bezüglich $\underline{\underline{d}}$

an und interpretieren Sie diese ökonomisch.

---

2. Bestimmen Sie die Inverse der Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 1 & a & a^2 & a^3 \\ 0 & 1 & a & a^2 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$(a \in \mathbb{R})$.

---

b.w.

3. Die Vektoren $\underline{a}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, $\underline{a}^2 = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ und $\underline{a}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ sind linear unabhängig und bilden daher eine Basis des $\mathbb{R}^3$.

   (i) Geben Sie die Koordinaten jedes der Vektoren

   $$\underline{e}^1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix},\ \underline{e}^2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \text{ und } \underline{e}^3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

   bezüglich der Basis $\underline{a}^1$, $\underline{a}^2$, $\underline{a}^3$ an.

   (ii) Welche Koordinaten hat der Vektor $\underline{z} := \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$ bezüglich der Basis $\underline{a}^1$, $\underline{a}^2$, $\underline{a}^3$?

   Hinweis: Man kann das bei der Herleitung des Austauschverfahrens über den Basiswechsel Gesagte ausnutzen (s.a. Homepage). Die o.g. Angaben lassen sich beispielsweise umschreiben zu

   $$\underline{\underline{a}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \underline{\underline{e}} \qquad \text{mit } \underline{\underline{a}} := \begin{bmatrix} \underline{a}^1 \\ \underline{a}^2 \\ \underline{a}^3 \end{bmatrix},\ \underline{\underline{e}} := \begin{bmatrix} \underline{e}^1 \\ \underline{e}^2 \\ \underline{e}^3 \end{bmatrix}.$$

   Matrixinversion führt zum gewünschten Erfolg!

---

4. TOP-Aufgabe: (Abgabe auf separatem Blatt!)

   Gegeben sind die Polynome $g_1(x) = \frac{1}{4}x^2$ und $g_2(x) = 2$.

   a) Stellen Sie die Funktionen $f_1(x) = -2x^2 - 1$ und $f_2(x) = -\frac{5}{4}x^2 + \frac{1}{2}$ als Linearkombination von $g_1(x)$ und $g_2(x)$ dar.

   b) Zeigen Sie, daß die Funktionen $f_1(x)$ und $f_2(x)$ linear unabhängig sind.

   c) Man gebe eine möglichst einfache Basis für den von $f_1(x)$ und $f_2(x)$ erzeugten Vektorraum an.

Abgabe: bis 17.01.2003 13.00 Uhr
Box 7, 12, 114, 124 (orange/grün) auf D1-Flur

Rückgabe: ab 22.01.2003
in den Übungsgruppen