1. Aufgabe: "Kugeln" (2x3 Punkte)

Aus einer Urne, die anfänglich $R = 12$ rote und $W = 10$ weiße Kugeln enthält, wird eine Kugel gezogen. Ist diese rot, wird sie zusammen mit zwei weiteren Kugeln – eine davon rot, die andere weiß – zurückgelegt; ist sie weiß, wird sie zusammen mit zwei weiteren weißen Kugeln zurückgelegt. Anschließend wird eine zweite Kugel gezogen und nach demselben Muster wieder zurückgelegt. Schließlich wird noch eine dritte Kugel gezogen.

(i) Mit welcher Wahrscheinlichkeit p werden nur rote Kugeln gezogen ?

$p =$	$\frac{13}{28}$	$\frac{13}{22}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{5}{26}$	$\frac{7}{44}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{14}{15}$	?

(ii) Sie erfahren, dass die zweite und dritte gezogene Kugel rot waren. Mit welcher Wahrscheinlichkeit q war auch die erste rot?

$q =$	$\frac{1}{2}$	$\frac{8}{13}$	$\frac{8}{11}$	$\frac{5}{12}$	$\frac{5}{7}$	$\frac{5}{11}$	$\frac{7}{12}$	?

Nebenrechnungen:

Im Folgenden bezeichnen A, B, C beliebige Ereignisse, X und Y Zufallsgrößen mit endlicher Streuung; "$\perp\!\!\!\perp$" steht für "unabhängig" und F_X für die Verteilungsfunktion von X.

Welche der folgenden Aussagen sind richtig (allgemeingültig), welche nicht? (Zutreffendes ankreuzen!)

(1) $A \perp\!\!\!\perp B \implies A \cap C \perp\!\!\!\perp B \cap C$

R	F	?

(2) $cov(X, Y) = 0 \iff X \perp\!\!\!\perp Y$

R	F	?

(3) $P(X \leq Y) = 1 \implies EX \leq EY$

R	F	?

(4) $X \sim N(0, 1) \implies F_X(x) + F_X(-x) = 1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

R	F	?

(5) $X \sim 2(p),\ p < \frac{1}{2} \implies med\, X = 0$

R	F	?

(6) $A \perp\!\!\!\perp B \implies P(A \cup B) = P(A) + P(B)$

R	F	?

(7) Für beliebige $\alpha,\ \beta \in \mathbf{R}$ gilt $D^2(\alpha X + \beta) = \alpha^2 D^2 X$.

R	F	?

(8) Die Funktion $x \mapsto f(x) := e^{-\frac{x^2}{2}}$, $x \in \mathbf{R}$ ist eine Wahrscheinlichkeitsdichte.

R	F	?

(9) Für jedes 0.9-Quantil $\alpha_{0.9}$ von X gilt $P(X < \alpha_{0.9}) < 0.9$ und $P(X \leq \alpha_{0.9}) \geq 0.9$.

R	F	?

(10) Sind X und Y identisch verteilt, so gilt $P(X = Y) = 1$.

R	F	?

75 verschiedene Fähnchen sollen auf 25 in einer Reihe stehende Fahnenmasten verteilt werden. Wir sprechen von einer "diplomatischen Beflaggung", wenn die Reihenfolge der Fähnchen auf jedem Mast von Bedeutung ist, andernfalls von einer "undiplomatischen Beflaggung".

(I) Wieviele Möglichkeiten der "diplomatischen Beflaggung" bestehen, wenn die Anzahl der Fähnchen je Mast

(i) exakt 3 betragen soll?

$\frac{100\,!}{25\,!}$	$\frac{75\,!}{6^{25}}$	$\frac{99\,!}{24\,!}$	$\binom{25}{15}\frac{75\,!}{120^{15}}$	$\binom{75}{25}$	$\frac{25\,!\,75\,!}{10\,!\,15\,!}$	$75\,!$	25^{75}	75^{25}	?

(ii) exakt 0 oder 5 sein darf?

$\frac{100\,!}{25\,!}$	$\frac{75\,!}{6^{25}}$	$\frac{99\,!}{24\,!}$	$\binom{25}{15}\frac{75\,!}{120^{15}}$	$\binom{75}{25}$	$\frac{25\,!\,75\,!}{10\,!\,15\,!}$	$75\,!$	25^{75}	75^{25}	?

(iii) völlig beliebig ist? (Jeder Mast kann beliebig viele Fähnchen aufnehmen.)

$\frac{100\,!}{25\,!}$	$\frac{75\,!}{6^{25}}$	$\frac{99\,!}{24\,!}$	$\binom{25}{15}\frac{75\,!}{120^{15}}$	$\binom{75}{25}$	$\frac{25\,!\,75\,!}{10\,!\,15\,!}$	$75\,!$	25^{75}	75^{25}	?

(II) Wieviele Möglichkeiten bestehen in den o.g. Fällen $(i) - (iii)$, wenn es sich um eine "undiplomatische Beflaggung" handelt?

(i) (exakt 3 Flaggen je Mast)

$\frac{100\,!}{25\,!}$	$\frac{75\,!}{6^{25}}$	$\frac{99\,!}{24\,!}$	$\binom{25}{15}\frac{75\,!}{120^{15}}$	$\binom{75}{25}$	$\frac{25\,!\,75\,!}{10\,!\,15\,!}$	$75\,!$	25^{75}	75^{25}	?

(ii) (exakt 0 oder 5 Flaggen je Mast)

$\frac{100\,!}{25\,!}$	$\frac{75\,!}{6^{25}}$	$\frac{99\,!}{24\,!}$	$\binom{25}{15}\frac{75\,!}{120^{15}}$	$\binom{75}{25}$	$\frac{25\,!\,75\,!}{10\,!\,15\,!}$	$75\,!$	25^{75}	75^{25}	?

(iii) (beliebig viele Flaggen je Mast)

$\frac{100\,!}{25\,!}$	$\frac{75\,!}{6^{25}}$	$\frac{99\,!}{24\,!}$	$\binom{25}{15}\frac{75\,!}{120^{15}}$	$\binom{75}{25}$	$\frac{25\,!\,75\,!}{10\,!\,15\,!}$	$75\,!$	25^{75}	75^{25}	?

Nebenrechnungen:

Eine ideale Münze werde 200 mal geworfen. Die Anzahl der dabei gefallenen Wappen werde mit X bezeichnet. Weiterhin sei

$$p := P(90 \leq X \leq 110).$$

(i) Geben Sie eine **Formel** an, mit der p **exakt** berechnet werden kann.

$p =$ $\boxed{}$

(ii) Schätzen Sie den Zahlenwert von p mit Hilfe der Čebyšev-Ungleichung nach **unten** ab.

$p \geq$ $\boxed{}$

(iii) Berechnen Sie den Wert von p **nährungsweise** mit Hilfe der Normalapproximation.

$p \approx$ $\boxed{}$

Nebenrechnungen:

Beim zweimaligen Werfen eines idealen Würfels bezeichne U die kleinere der gewürfelten Augenzahlen und V die Differenz zwischen dem Maximum und dem Minimum der beiden gewürfelten Augenzahlen.

(i) Ergänzen Sie die nachfolgende Tabelle:

$36 \cdot P(U = u,\ V = v)$	$v =$ 0	1	2	3	4	5	$36 \cdot P(U = u)$
$u = 1$	1	2	2	2	2	2	11
2	1	2	2	2			
3	1	2	2	2			
4	1	2	2	0			
5	1	2	0	0			
6	1	0	0	0			
$36 \cdot P(V = v)$	6	10	8	6			

(ii) Sind U und V unabhängig? (Begründung!)

◯ Ja, denn ______________________________

____

◯ Nein, denn ______________________________

____

(iii) Berechnen Sie:

$EUV =$ $\boxed{}$

$EU =$ $\boxed{}$

$EV =$ $\boxed{}$

$cov\,(U,\ V) =$ $\boxed{}$

$P\,(U \leq 4,\ V \leq 3) =$ $\boxed{}$

$P\,(U \leq 4 \mid V = 3) =$ $\boxed{}$

Nebenrechnungen: