ÜBERSICHT: TECHNIK DES PARTIELLEN ABLEITENS

ECO MATH –**Dietz** –

1. Beispiel $\qquad f(x,y) = x + 2y^2$ auf $D = \mathbb{R}^2$

- Partielle Ableitungen allgemein:

$$
\begin{aligned}
f_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x + 2y^2) \\
&= \frac{\partial}{\partial x}x + 2\frac{\partial}{\partial x}y^2 && \text{(Linearität der Ableitung)} \\
&= \frac{\partial}{\partial x}x + 0 && \text{(} y \text{ hängt } \textbf{nicht} \text{ von } x \text{ ab)} \\
&= 1 && \text{(Ableitungsregel für Potenzen)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
f_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y}x + \frac{\partial}{\partial y}2y^2 \\
&= \frac{\partial}{\partial y}x + 2\frac{\partial}{\partial y}y^2 && \text{(Linearität der Ableitung)} \\
&= 0 + 2\frac{\partial}{\partial y}y^2 && \text{(} x \text{ hängt } \textbf{nicht} \text{ von } y \text{ ab)} \\
&= 2 \cdot 2y && \text{(Ableitungsregel für Potenzen)} \\
&= 4y
\end{aligned}
$$

- Partielle Ableitung an der Stelle $(x^0, y^0) = (3,7)$:

$$
\begin{aligned}
f_x(3,7) &= f_x(x,y)\Big|_{(x,y)=(3,7)} = 1 && \text{(Anstieg der Tangente an den Schnitt “} y = 7 \text{” im Punkt } x = 3\text{.)} \\
f_y(3,7) &= f_y(x,y)\Big|_{(x,y)=(3,7)} = 4y\Big|_{x=3,y=7} = 28 && \text{(Anstieg der Tangente an den Schnitt “} x = 3 \text{” im Punkt } y = 7\text{.)}
\end{aligned}
$$

2. Beispiel $\qquad g(x,y) = xy^2$ auf $D = \mathbb{R}^2$

$$\begin{aligned}
g_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(xy^2) \\
&= \left(\frac{\partial}{\partial x} x\right) y^2 && \text{(der \textbf{konstante} -d.h. nicht von } x \text{ abhängende Faktor- } y^2 \text{ wird ausgeklammert)} \\
&= 1 \cdot y
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} xy^2 \\
&= x\left(\frac{\partial}{\partial y} y^2\right) && \text{(der \textbf{konstante} Faktor } x \text{ wird ausgeklammert)} \\
&= x \cdot 2y = 2xy && \text{(Potenzableitung)}
\end{aligned}$$

3. Beispiel $\qquad h(x,y) = x^y$ auf $D = (0,\infty) \times \mathbb{R}$

$$\begin{aligned}
h_x(x,y) &= \frac{\partial}{\partial x}(x^y) && (y \text{ wird als konstanter Exponent betrachtet}) \\
&= yx^{y-1} && \text{(Potenzableitung)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_y(x,y) &= \frac{\partial}{\partial y} x^y && (x \text{ wird als konstante Basis betrachtet}) \\
&= \frac{\partial}{\partial y} \left(e^{\ln x}\right)^y && \text{(Hilfsschritt)} \\
&= \frac{\partial}{\partial y} e^{y \ln x} && \text{(mit der \textbf{Konstanten} } \ln x) \\
&= (\ln x) e^{y \ln x} && \text{(Ableitung der e-Funktion und der Funktion } y \mapsto y \ln x \text{ nach } y \text{ (Kettenregel))} \\
&= (\ln x)\, x^y
\end{aligned}$$

4. Beispiel $z(\alpha,\beta,\gamma) := \alpha^{\beta^\gamma}$ $\Big($ lies: $\alpha^{\left(\beta^\gamma\right)}\Big)$, $\alpha,\beta,\gamma>0$

$$
\begin{aligned}
z_\alpha &= \frac{\partial}{\partial\alpha}\alpha^{\beta^\gamma} && (\beta^\gamma \text{ ist als Exponent "konstant"})\\
&= \beta^\gamma\ \alpha^{\beta^\gamma-1} && (\text{Ableitungsregel für Potenzen})\\
\\
z_\beta &= \frac{\partial}{\partial\beta}\left(e^{\ln\alpha}\right)^{\beta^\gamma} && (\text{Hilfsschritt})\\
&= \frac{\partial}{\partial\beta}e^{(\ln\alpha)\cdot\beta^\gamma} && \left(\text{mit den "Konstanten" } \ln\alpha \text{ und } \gamma;\ \text{Form:} \frac{\partial}{\partial\beta}e^{k\cdot f(\beta)}\right)\\
&= (\ln\alpha)e^{(\ln\alpha)\cdot\beta^\gamma}\cdot\boxed{\gamma\beta^{\gamma-1}} && \left(\text{Ableitung: } k\cdot e^{k\cdot f(\beta)}\cdot\boxed{f'(\beta)} \quad (\text{Kettenregel})\ \right)\\
&= \gamma(\ln\alpha)\alpha^{\beta^\gamma}\ \beta^{\gamma-1}\\
\\
z_\gamma &= \frac{\partial}{\partial\gamma}\alpha^{\beta^\gamma}\\
&= \frac{\partial}{\partial\gamma}\left(e^{\ln\alpha}\right)^{\left(e^{\ln\beta}\right)^\gamma} && (\text{Hilfsschritt})\\
&= \frac{\partial}{\partial\gamma}e^{(\ln\alpha)e^{(\ln\beta)\gamma}} && \left(\text{Form: } u(v(\gamma)) \text{ mit } u(v){=}e^{(\ln\alpha)v},\ v(\gamma){=}e^{(\ln\beta)\gamma},\ \text{hierbei } u'(v){=}(\ln\alpha)u(v),\ v'(\gamma){=}(\ln\beta)v(\gamma)\right)\\
&= \frac{\partial}{\partial\gamma}u(v(\gamma))\\
&= u'(v(\gamma))\ v'(\gamma) && (\text{Kettenregel})\\
&= (\ln\alpha)u(v(\gamma))(\ln\beta)v(\gamma)\\
&= (\ln\alpha)(\ln\beta)u(v(\gamma))v(\gamma)\\
&= (\ln\alpha)(\ln\beta)\alpha^{\beta^\gamma}\cdot\beta^\gamma
\end{aligned}
$$