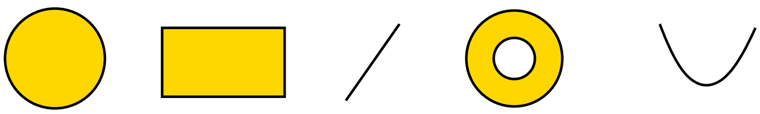
- **konvexe Linearkombination (LK):** Seien ein linearer Raum $\mathcal{M}, n \in \mathbb{N}, \underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n \in \mathcal{M}$ gegeben.

  ▷ LK $\lambda_1 \underline{x}^1 + \cdots + \lambda_n \underline{x}^n$ heißt *konvexe LK*, falls gilt:
  $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ und
  $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0.$

- **konvexe Menge:**

  ▷ Eine Teilmenge M eines lin. Raumes $\mathcal{M}$ heißt *konvex*, wenn gilt
  $\forall \underline{x}, \underline{y} \in M, \lambda \in [0,1] \; : \quad \lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y} \in \mathcal{M}$

  Verbal: M ist konvex, wenn mit je zwei Punkten $\underline{x}, \underline{y}$ auch die Verbindungsstrecke zwischen $\underline{x}$ und $\underline{y}$ in M enthalten ist.



konvex konvex konvex nicht konvex nicht konvex (als Menge!)

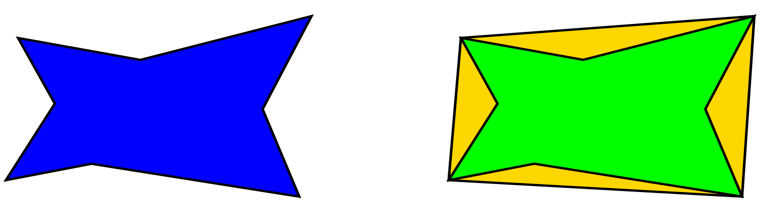
  ⚠ Es gibt keine "konkaven" Mengen.

- **konvexe Hülle:** Sei M eine Teilmenge eines lin. Raumes $\mathcal{M}$.

  ▷ Die Gesamtheit aller konvexen LK je endlich vieler Elemente von M heißt *konvexe Hülle*: $conv(M)$ von M.
  (Formal: $conv(M) = \left\{ \lambda_1 \underline{x}^1 + \cdots + \lambda_n \underline{x}^n \mid n \in \mathbb{N}, \underline{x}^1, \ldots, \underline{x}^n \in M, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \geq 0, \lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1 \right\}$)

  Visuell:

  M $conv(M)$



  Es gilt: • $conv(M)$ ist eine konvexe Menge, und zwar die kleinste konvexe Menge, die M enthält.
  • $conv(\underline{x}, \underline{y})$ ist die Strecke $\underline{\overline{xy}}$

- $\left\{ \begin{array}{l} \textbf{\textit{konvexe}} \\ \textbf{\textit{konkave}} \end{array} \right\}$ **Funktionen:**

  ⚠ Der Begriff ist nur für Funktionen f definiert, deren Definitionsbereich D eine konvexe Menge ist!

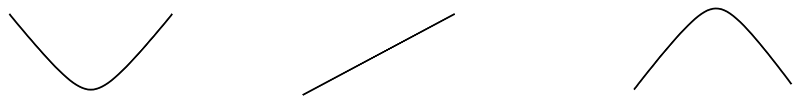
  ▷ D sei nichtleere, konvexe Teilmenge des $\mathbb{R}^n$. $f : D \to \mathbb{R}$ heißt

  $$\left\{ \begin{array}{l} \textit{konvex} \\ \textit{konkav} \end{array} \right\}, \text{ falls gilt: } \forall_{\substack{\underline{x},\underline{y} \in D \\ \lambda \in [0,1]}} \quad f(\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) \quad \left\{ \begin{array}{c} \leq \\ \geq \end{array} \right\} \quad \lambda f(\underline{x}) + (1-\lambda) f(\underline{y})$$

  $$\left\{ \begin{array}{l} \textit{strikt konvex} \\ \textit{strikt konkav} \end{array} \right\}, \text{ falls gilt: } \forall_{\substack{\underline{x},\underline{y} \in D \\ \lambda \in (0,1)}} \quad f(\lambda \underline{x} + (1-\lambda)\underline{y}) \quad \left\{ \begin{array}{c} < \\ > \end{array} \right\} \quad \lambda f(\underline{x}) + (1-\lambda) f(\underline{y})$$

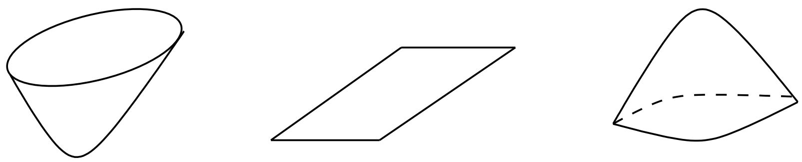
- **Illustration:** Graphen einiger Funktionen

im $I\!\!R^1$



strikt konvex — konvex und konkav (beides nicht strikt) — strikt konkav

im $I\!\!R^2$



⚠ Überprüfung im Fall $2\times$ differenzierbarer Funktionen
$\nearrow$ Merkblatt "Grundeigenschaften"

⚠ Der Graph einer $\left\{\begin{array}{l}\textit{konvexen}\\ \textit{konkaven}\end{array}\right\}$ Funktion braucht (als Teilmenge des $I\!\!R^2, I\!\!R^3, \ldots$) nicht $\left\{\begin{array}{l}\textit{konvex}\\ \textit{konkav}\end{array}\right\}$ zu sein.

- Es gilt:
  - Die Summe konvexer Funktionen ist konvex.
  - Positive Vielfache konvexer Funktionen sind konvex.
  - f konvex $\Leftrightarrow -f$ konkav
  - Die Höhen"linien" $\left\{\begin{array}{l}\textit{konvexer}\\ \textit{konkaver}\end{array}\right\}$ Funktionen umschließen konvexe Mengen.
  - Genauer:
    Für eine $\left\{\begin{array}{l}\textit{konvexe}\\ \textit{konkave}\end{array}\right\}$ Funktion $f : D \to I\!\!R$ sind alle $\left\{\begin{array}{l}\text{"}\textit{Unterhalb-}\text{"}\\ \text{"}\textit{Oberhalb-}\text{"}\end{array}\right\}$ Mengen $\left\{\begin{array}{l}\{f \leq c\}\\ \{f \geq c\}\end{array}\right\}$, $c \in I\!\!R$, konvex (dabei eventuell leer).
    (Dabei bedeutet $\left\{\begin{array}{l}\{f \leq c\}\\ \{f \geq c\}\end{array}\right\} := \{\, \underline{x} \in D : f(\underline{x}) \left\{\begin{array}{l}\leq\\ \geq\end{array}\right\} c \,\}$.)
  - f konvex $\Leftrightarrow$ $Epi(f)$ konvex
    (Mit $Epi(f)$ wird der *Epigraph* von f bezeichnet:

$$Epi(f) = \left\{ (\underline{x}, z) \in I\!\!R^{n+1} \;\middle|\; \underline{x} \in D, z \geq f(\underline{x})\right\}$$

    Anschaulich ist dies die Menge aller Punkte des $I\!\!R^{n+1}$, die dem Graphen von f angehören oder "oberhalb" davon liegen.)