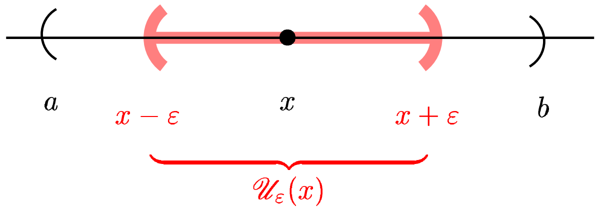
OFFENE INTERVALLE IM $\mathbb{R}^1$

- Form: $I = (a,\, b) \qquad -\infty \leqslant a < b \leqslant \infty$
- Besonderheit: Jeder Punkt $x \in I$ ist “innerer Punkt”, d.h., hat einen positiven Mindestabstand ε von allen Punkten, die nicht zu I gehören:



Man nennt $\mathscr{U}_\varepsilon(x) = \{ y \in \mathbb{R} \mid |x-y| < \varepsilon \}$ “(offene) $\varepsilon-$ Umgebung von x” oder “(offene) $\varepsilon-$ Kugel um x”.

BELIEBIGE OFFENE TEILMENGEN DES $\mathbb{R}^1$

- **Definition:** Eine Teilmenge $O \subset \mathbb{R}^1$ heißt *offen*, wenn jeder Punkt $x \in O$ innerer Punkt ist, d.h. wenn gilt

$$\forall\, x \in O \quad \exists\, \varepsilon > 0 \;:\, \mathscr{U}_\varepsilon(x) \subset O$$

- **Beispiele:**

$O = \mathbb{R}$	(Bedingung automatisch erfüllt)
$O = (-\infty, 1)$	(offenes Intervall)
$O = (-3, 1) \cup (2, 10)$	(Vereinigung offener Intervalle)
$O = \emptyset$	(leere Menge: für keinen Punkt ist eine Bedingung zu erfüllen)

OFFENE MENGEN IM $\mathbb{R}^n$

- Analog zur Situation im $\mathbb{R}^1$ **definiert** man:
  Eine Teilmenge $O \in \mathbb{R}^n$ heißt *offen*, wenn jeder Punkt $\underline{x} \in O$ innerer Punkt ist, d.h. wenn gilt

$$\forall\, x \in O \quad \exists\, \varepsilon > 0 \;:\, \mathscr{U}_\varepsilon(\underline{x}) \subset O$$

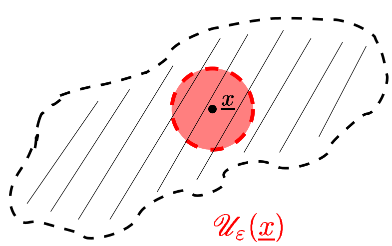
- Hierbei ist, analog zum $\mathbb{R}^1$,

$$\mathscr{U}_\varepsilon(\underline{x}) = \{ \underline{y} \in \mathbb{R}^n \mid ||\underline{x} - \underline{y}|| < \varepsilon \}\,,$$

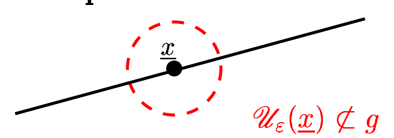
  wobei $||\;\cdot\;||$ die euklidische Norm bezeichnet:

$$||\,\underline{x}\,|| = \sqrt{x_1^2\, +\, \cdots\, +\, x_n^2}$$

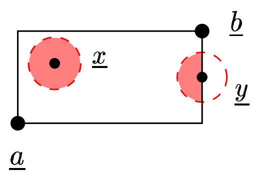
- Anschaulich (im $\mathbb{R}^2$)



- **Beispiele:**
  - $O = \mathbb{R}^n$
  - $O = \emptyset$
  - $O = (\underline{a}, \underline{b})$ offener "Quader" (s.u.)

- **"Nichtbeispiele":**
  - 

    Gerade $g \subset \mathbb{R}^n$: Für kein $\underline{x} \in g$ und kein $\varepsilon > 0$ gilt $\mathscr{U}_\varepsilon(\underline{x}) \subset g$
  - einzelne Punkte
  - "abgeschlossener" Quader, d.h. Quader der Form $[\underline{a}, \underline{b}]$ mit $\underline{a} \ll \underline{b}$ (Def. s.u.)



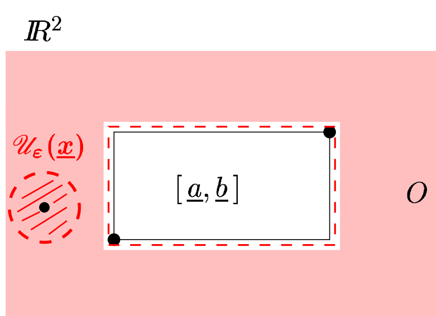
Es gibt innere Punkte, wie $\underline{x}$ im Bild; der Punkt $\underline{y}$ ist kein innerer Punkt, weil keine ε–Umgebung $\mathscr{U}_\varepsilon(\underline{y})$ ganz in $[\underline{a}, \underline{b}]$ liegt.

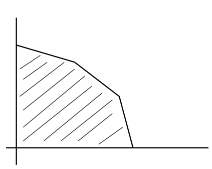
ABGESCHLOSSENE MENGEN IM $\mathbb{R}^n$

- **Definition:** Eine Teilmenge $A \in \mathbb{R}^n$ heißt *abgeschlossen*, wenn die Menge $\mathbb{R}^n \setminus A$ offen ist.

- Anmerkung: Man nennt $\mathbb{R}^n \setminus A$ das *(mengentheoretische) Komplement von A*.

- **Visualisierung:**
  Der oben abgebildete Quader $[\underline{a}, \underline{b}]$ ist abgeschlossen, denn sein Komplement $O := \mathbb{R}^2 \setminus [\underline{a}, \underline{b}]$ ist offen:



- **Weitere Beispiele:**
  - $[1, 2] \cup [3, 4]$ Vereinigung (endlich vieler) abgeschlossener Mengen
  - 
    Simplex
    (z.B. beim "Gemüsebauer")
  - $\mathbb{R}^n$ denn $\mathbb{R}^n \setminus \mathbb{R}^n = \emptyset$ ist offen (s.o)
  - $\emptyset$ denn $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^n \setminus \emptyset$ ist abgeschlossen

SPEZIALFALL: QUADER IM $I\!R^n$

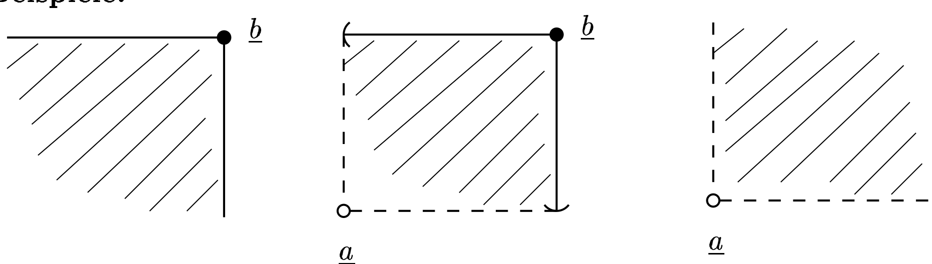
- Bezeichnung:

  $$\begin{array}{ll}
  [\,\underline{a},\underline{b}\,] := \{\underline{x} \in I\!R^n : \underline{a} \leqslant \underline{x} \leqslant \underline{b}\} & -\infty \ll \underline{a},\underline{b} \ll \infty \\
  (\,\underline{a},\underline{b}\,] := \{\underline{x} \in I\!R^n : \underline{a} \ll \underline{x} \leqslant \underline{b}\} & -\infty \leqslant \underline{a},\underline{b} \ll \infty \\
  [\,\underline{a},\underline{b}\,) := \{\underline{x} \in I\!R^n : \underline{a} \leqslant \underline{x} \ll \underline{b}\} & -\infty \ll \underline{a},\underline{b} \leqslant \infty \\
  (\,\underline{a},\underline{b}\,) := \{\underline{x} \in I\!R^n : \underline{a} \ll \underline{x} \ll \underline{b}\} & -\infty \leqslant \underline{a},\underline{b} \leqslant \infty
  \end{array}$$

  Man nennt

$[\,\underline{a},\underline{b}\,]$	abgeschlossenen Quader
$(\,\underline{a},\underline{b}\,)$	offenen Quader
$(\,\underline{a},\underline{b}\,]$ und $[\,\underline{a},\underline{b}\,)$	halboffene (halbabgeschlossene) Quader im $I\!R^n$.

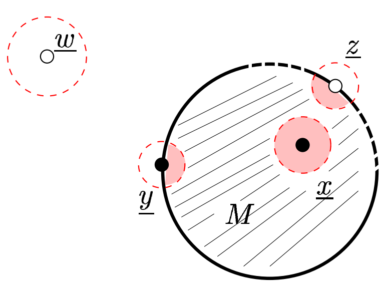
- **Beispiele:**



$(\,-\infty,\underline{b}\,]$	$(\,\underline{a},\underline{b}\,]$	$(\,\underline{a},\infty\,]$
"halboffener Quader"	"halboffener Quader"	"offener Quader"
als Menge: abgeschlossen	als Menge: weder offen noch abgeschlossen	als Menge: offen

RAND- UND BERÜHRUNGSPUNKTE

- Anschaulich kann man die Punkte des $I\!R^n$ bezüglich einer gegebenen Menge M wie folgt klassifizieren:

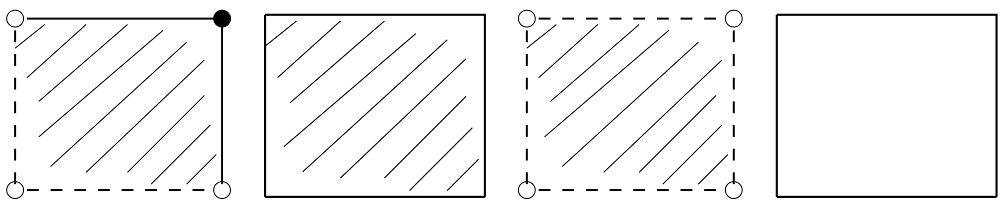


$\underline{x}$	innerer Punkt von M
$\underline{x},\underline{y},\underline{z}$	"berühren" M
$\underline{x},\underline{y}$	"liegen auf dem Rand" (keine inneren Punkte)
$\underline{w}$	"berührt M nicht" (ist innerer Punkt von $I\!R^n \setminus M$)

- Formale **Definition**:

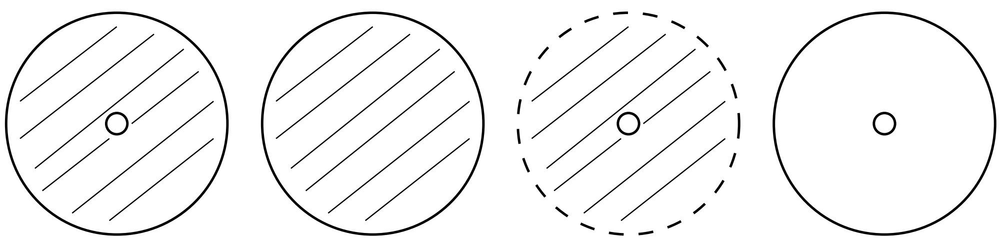
- Ein Punkt $\underline{u} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Berührungspunkt* von M, wenn jede $\varepsilon-$ Umgebung $\mathscr{U}_\varepsilon(\underline{u})$ Punkte von M enthält.
- Ein Punkt $\underline{v} \in \mathbb{R}^n$ heißt *Randpunkt* von M, wenn er Berührungspunkt von M, jedoch kein innerer Punkt von M ist.
- Die Menge aller Randpunkte von M heißt *Rand* von M und wird mit dem Symbol ∂M bezeichnet.
- Die Menge aller Berührungspunkte von M heißt *Abschluß* von M und wird mit dem Symbol $\overline{M}$ bezeichnet.
- Die Menge aller inneren Punkte von M heißt *offener Kern* oder *Inneres* von M und wird mit $\mathring{M}$ bezeichnet.

- **Visualisierung:**

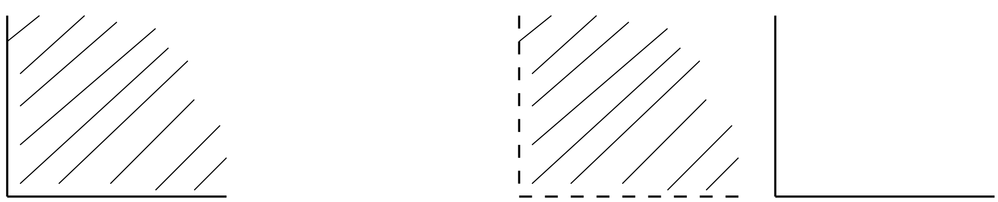


M $\quad$ $\overline{M}$ Abschluß $\quad$ $\mathring{M}$ Inneres $\quad$ ∂M Rand

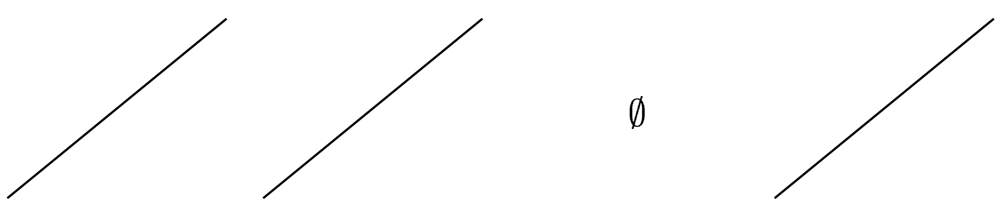
- **Weitere Beispiele:**



M $\quad$ $\overline{M}$ $\quad$ $\mathring{M}$ $\quad$ ∂M



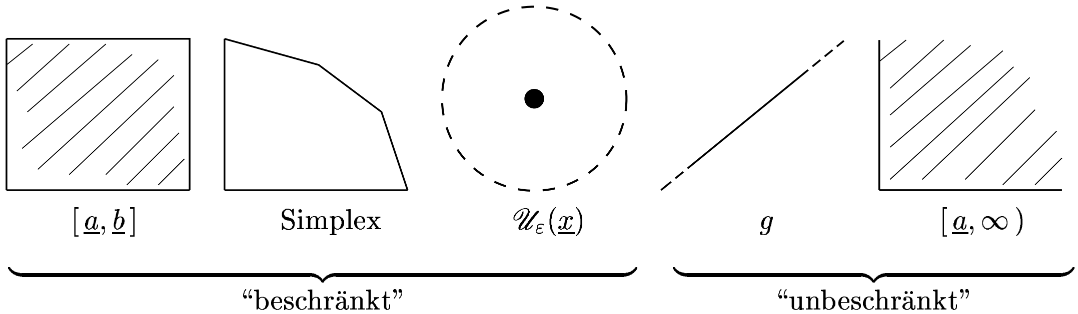
$[\underline{a}, \infty)$ $\quad$ $= \overline{[\underline{a}, \infty)}$ $\quad$ $\mathring{[a, \infty)} = (\underline{a}, \infty)$ $\quad$ $\partial[\underline{a}, \infty)$



g $\quad$ $\bar{g}$ $\quad$ $\mathring{g}$ $\quad$ ∂g

BESCHRÄNKTE MENGEN

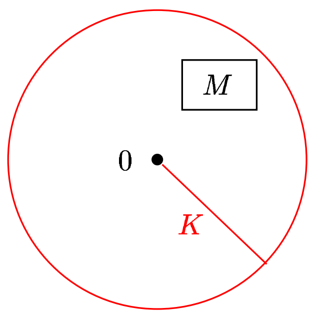
- **Motivation:**



- **Definition:** Eine Telmenge $M \subset I\!R^n$ heißt *beschränkt*, wenn eine Konstante K existiert mit

$$||\,\underline{x}\,|| \leqslant K \text{ für alle } \underline{x} \in M.$$

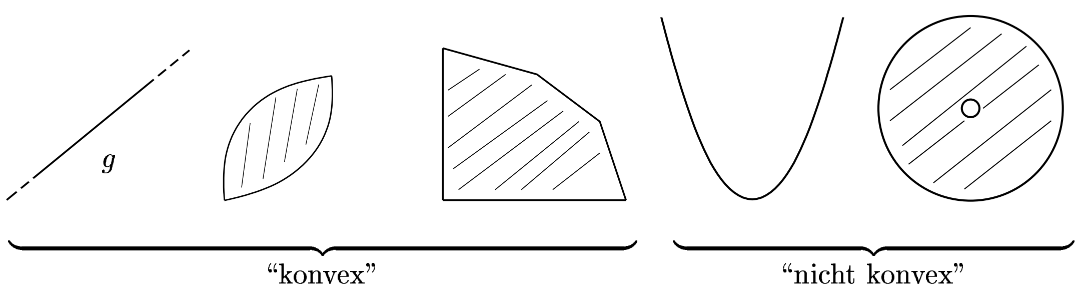
- Deutung: M ist ganz in einem Kreis (in einer "Kugel") vom Radius K um den Koordinatenursprung enthalten:



- **ökonomischer Kontext:**
Überall dort, wo Ressourcen- oder Kapazitätsbeschränkungen vorliegen, äußert dies sich darin, daß die Mengen möglicher Güterbündel, Produktionsfaktorkombinationen etc. beschränkt sind.

KONVEXE MENGEN (Erinnerung)

- **Motivation:**



- **Definition:** Eine Teilmenge M eines linearen Raumes $\mathscr{M}$ heißt *konvex*, wenn gilt:

$$\forall\ \underline{x}, \underline{y} \in M \quad \forall\ \lambda \in [\,0, 1\,]: \qquad \lambda\,\underline{x} + (1-\lambda)\,\underline{y}\ \in M$$

(d.h., wenn sie mit je zwei Punkten auch deren Verbindungsstrecke (ganz) enthält).

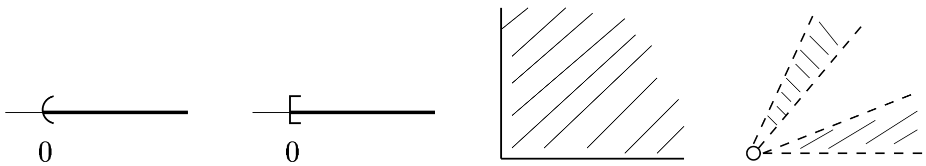
- **ökonomischer Kontext:**
  Die Mengen zulässiger Handlungsmöglichkeiten (Produktionspläne, Produktionsmöglichkeiten, ...) sind typischerweise konvex.

KONUSSE

- **Definition:** Eine Teilmenge $M \subset \mathscr{L}$ eines linearen Raumes $\mathscr{L}$ heißt *Konus*, falls gilt

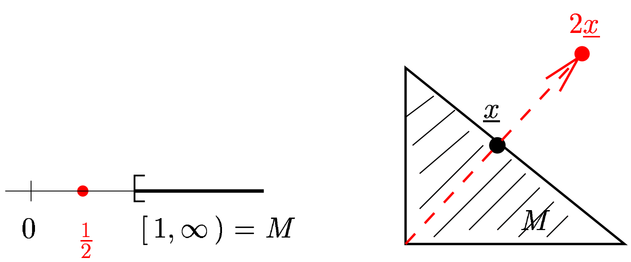
$$\underline{x} \in M, \lambda > 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda \underline{x} \in M.$$

- **Beispiele:**



$(0, \infty) \subset I\!R^1$ $\quad$ $[0, \infty) \subset I\!R^1$ $\quad$ $[0, \infty)^2$

- **"Nicht-Beispiele":**



$\frac{1}{2} = \frac{1}{2} \cdot 1 \notin M$ $\quad$ $2 \cdot \underline{x} \notin M$

- **ökonomischer Kontext:**
  Eine proportionale Verminderung/Erhöhung eines Produktionsplanes $\underline{x}$ äußert sich im Übergang zu $\lambda \cdot \underline{x}$ (mit $0 < \lambda < 1$ bzw. $1 < \lambda$). Sind alle derartigen Änderungen (theoretisch) zulässig, ist die Menge zulässiger Produktionspläne ein Konus.