Lineare Räume

Definition:
Eine Menge $\mathcal{M}$, versehen mit zwei Abbildungen *Addition* "+" und *Multiplikation mit einem Skalar* "$\cdot$"

$$+ : \mathcal{M} \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} : (\underline{x}, \underline{y}) \mapsto \underline{x} + \underline{y}$$

$$\cdot : I\!R \times \mathcal{M} \longrightarrow \mathcal{M} : (c, \underline{y}) \mapsto c \cdot \underline{y}$$

heißt ein *linearer Raum*, wenn gilt:

(A1) $\boxed{\underline{x} + (\underline{y} + \underline{z}) = (\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z}}$ $(\underline{x}, \underline{y}, \underline{z} \in \mathcal{M})$ (Assoziativgesetz)

(A2) $\boxed{\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}}$ $(\underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{M})$ (Kommutativgesetz)

(A3) es existiert ein Element "0" $\in \mathcal{M}$ mit
$\boxed{\underline{x} + 0 = \underline{x}}$ $(\underline{x} \in \mathcal{M})$ (neutrales Element).

(A4) zu jedem $\underline{x} \in \mathcal{M}$ existiert ein Element "$-\underline{x}$" $\in \mathcal{M}$ mit
$\boxed{\underline{x} + (-\underline{x}) = 0}$ (additives Inverses)
.

(M1) $\boxed{(cd) \cdot \underline{x} = c \cdot (d \cdot \underline{x})}$ $(c, d \in I\!R, \underline{x} \in \mathcal{M})$

(M2) $\boxed{1 \cdot \underline{x} = \underline{x}}$ $(\underline{x} \in \mathcal{M})$

(D1) $\boxed{c \cdot (\underline{x} + \underline{y}) = c \cdot \underline{x} + c \cdot \underline{y}}$ $(c \in I\!R, \underline{x}, \underline{y} \in \mathcal{M})$ (Distributivgesetz)

(D2) $\boxed{(c + d) \cdot \underline{x} = c \cdot \underline{x} + d \cdot \underline{x}}$ $(c, d \in I\!R, \underline{x} \in \mathcal{M})$ (Distributivgesetz)