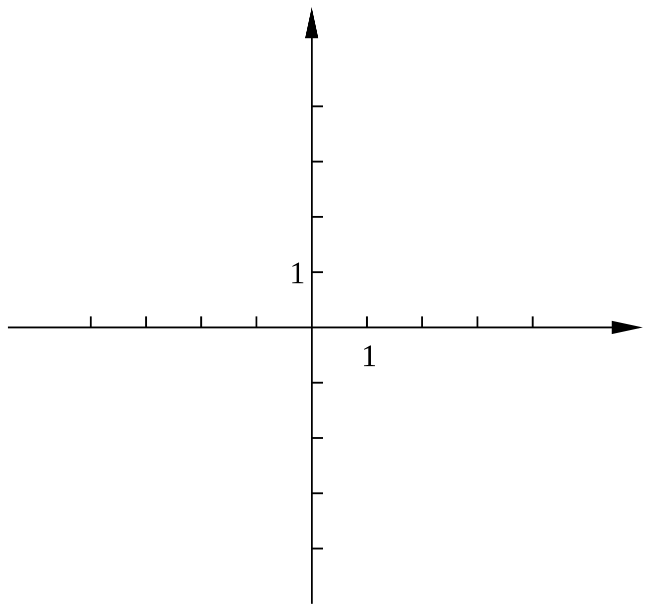
Aufgabe 1 : 10 Punkte

(i) Skizzieren Sie den größtmöglichen Definitionsbereich $D \subset \mathbb{R}^2$ der durch den Ausdruck

$$Q(x,y) := \sqrt{xy + 3x}$$

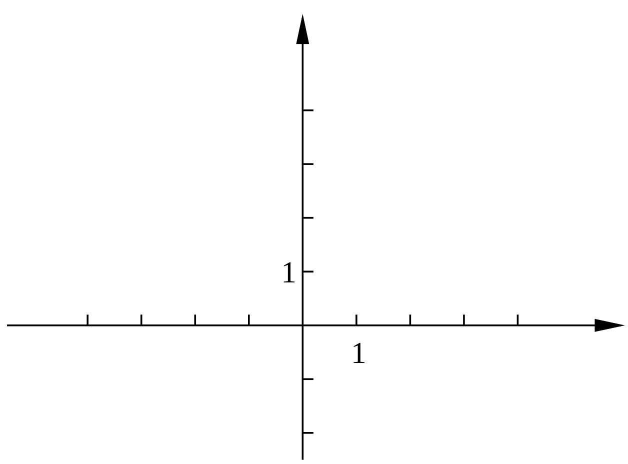
definierten Funktion!



(ii) Skizzieren Sie den Vertikalschnitt "$x = 3$" von Q.

Formel: $Q(3,y) = \boxed{}$

Definitionsbereich: $D = \left\{ \right\}$

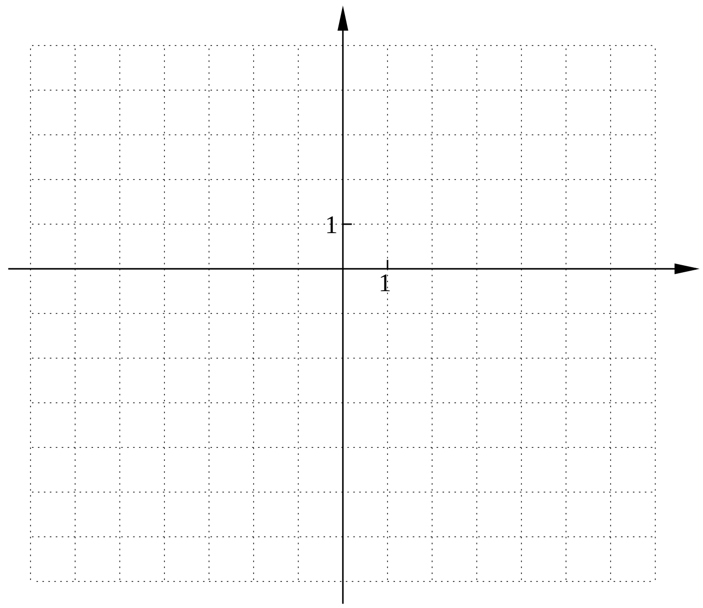


Dieser Schnitt ist

konvex	konkav	weder/noch	**?**
monoton ↗	monoton ↘	weder/noch	**?**

(iii) Skizzieren Sie die Höhenlinie $\{ Q = \sqrt{3} \}$.

Formel: $\{ Q = \sqrt{3} \} = \left\{ (x, y) \in I\!R^2 : \qquad\qquad\qquad\qquad \right\}$



(iv) Schraffieren Sie die Konturmenge $\{ Q \geqslant \sqrt{3} \} = \{ (x, y) \in D \mid Q(x, y) \geqslant \sqrt{3} \}$ in obenstehender Skizze.

(i) Berechnen Sie die Determinante der Matrix L:

$$L = \begin{pmatrix} 0 & 5 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & -3 \\ 2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & -5 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \det L = \boxed{}$$

(ii) Welche der folgenden Gleichungen gelten für alle $(3,3)-$ Matrizen A, B, $\lambda \in \mathbb{R}$?

$\det AB$	$=$	$(\det A)(\det B)$	J	N	?
$\det \lambda B$	$=$	$\lambda \det B$	J	N	?
$\det(3A + 2B)$	$=$	$2 \det A + 3 \det B$	J	N	?
$\det e^5 A^2$	$=$	$e^{15} (\det A)^2$	J	N	?

(iii) Ermitteln Sie alle Eigenwerte der folgenden Matrix S:

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 4 & 6 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \qquad \text{Eigenwerte} \quad \boxed{}$$

Rechnung/Begründung:

(iv) Antworten Sie: Die Matrix

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 0 & 2 & 4 \\ 5 & 4 & 33 \end{pmatrix} \quad \text{ist}$$

- ◯ positiv definit
- ◯ positiv semidefinit
- ◯ indefinit
- ◯ negativ semidefinit
- ◯ negativ definit

Das Unternehmen "Numerus" erzielt bei der Ausbringung von x bzw. y Mengeneinheiten (ME) zweier Güter X bzw. Y einen Gewinn in Höhe von

$$G(x,y) = 5xy + x + 17y - \frac{x^4}{12} - \frac{y^4}{12} - \frac{10x^2}{3} - 3y^2 - \frac{7}{12}$$

Geldeinheiten (GE). Es können - unabhängig voneinander - bis zu 26 ME des Gutes X und bis zu 38 ME des Gutes Y hergestellt werden. Um ein Gutachten gebeten, teilt die Unternehmensberatung "Clausus" mit, der höchstmögliche Gewinn sei mit dem Produktionsplan $(x^*, y^*) = (2,3)$ - und nur mit diesem - zu erzielen. Allerdings fehlen Hinweise auf den Maximalgewinn und das angewendete Berechnungsverfahren.

Die Geschäftsleitung von "Numerus" wendet sich daher an Sie als Teilnehmer der Klausur "Mathematik B für Wirtschaftswissenschaftler" mit der Bitte um eine unabhängige gutachterliche Prüfung des Ergebnisses von "Clausus".

In ihrem Gutachten sind folgende Fragen zu beantworten:

1. Ist der Produktionsplan $(x^*, y^*) = (2,3)$ tatsächlich gewinnoptimal? $\boxed{\text{J}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{\textbf{?}}$
2. Gibt es weitere gewinnoptimale Produktionspläne? $\boxed{\text{J}}$ $\boxed{\text{N}}$ $\boxed{\textbf{?}}$
3. Wie groß ist der größtmögliche Gewinn G_{max}? $G_{max} = \boxed{}$
4. Erläutern Sie in wenigen Sätzen ihre Vorgehensweise:
   Welche Bedingung(en) ist(sind) für die (globale) Gewinnoptimalität des Punktes $(x^*, y^*) = (2,3)$
   a) notwendig?
   b) hinlänglich?

   Sind diese Bedingungen erfüllt?

Erläuterungen: *(Die notwendigen Rechnungen sind auf der benachbarten Seite anzufügen.)* ....

....

....

....

....

....

....

....

....

....

Rechnungen/Konzept:

Aufgabe 4 : **12 Punkte**

Die Nachfrage nach einem Gut X werde als Funktion des Preises durch

$$x(p) = \frac{1}{1+p^2}\,, \quad p \geqslant 0\,,$$

beschrieben.

(i) Geben Sie die Elastizität $\varepsilon_x(p)$ der Nachfrage bezüglich des Preises p als Funktion von p an:

$\varepsilon_x(p) \quad = \quad \boxed{}$

(ii) Bei welchem Preis p_0 reagiert die Nachfrage proportional-elastisch?

$p_0 \quad = \quad \boxed{}$

(iii) Wie lautet die Elastizität ε_U der durch $U(p) = p\,x(p)$, $p \geqslant 0$, definierten Umsatzfunktion bezüglich des Preises?

$\varepsilon_U(p) \quad = \quad \boxed{}$

(iv) Welchen Zahlenwert hat $\varepsilon_U(p)$ an der Stelle $p = 1$, und wie ist dieser zu interpretieren?

$\varepsilon_U(1) \quad = \quad \boxed{}$

Interpretation: ....

....

Rechnungen/Konzept:

Wir betrachten die durch

$$x(B,p,q) := \frac{B - 3p + 5q}{2p}$$

auf $D = (0, \infty)^3$ definierte Funktion.

(i) Ist x (als Funktion aller drei Variablen B, p, q) homogen?
Wenn ja, von welchem Grad?

☐ x ist nicht homogen

☐ x ist homogen, und zwar vom Grad ☐

[?] weiß nicht

(ii) Bestimmen Sie die partiellen Elastizitäten von x bezüglich B, p und q (als Funktion aller drei Variablen).

$\varepsilon_{x,B}(B,p,q) =$ ☐

$\varepsilon_{x,p}(B,p,q) =$ ☐

$\varepsilon_{x,q}(B,p,q) =$ ☐

(iii) Ergänzen Sie: Es gilt $\varepsilon_{x,B} + \varepsilon_{x,p} + \varepsilon_{x,q} = 0$ aufgrund ....

....

....

Rechnungen/Konzept:

Ein Haushalt, der zwei Güter X und Y zu den Preisen $p > 0$ und $q > 0$ erwerben kann, bewertet den subjektiven Nutzen beim Erwerb des Güterbündels (x, y) durch den Nutzenindex

$$U(x,y) = \sqrt{xy + 3x}\,, \quad x, y \geqslant 0\,.$$

Das Budget des Haushaltes betrage B Geldeinheiten und sei größer als $3q$.

(i) Ermitteln Sie die Nachfragen $x = x(B,p,q)$ und $y = y(B,p,q)$ des Haushaltes an den Gütern X bzw. Y als Funktionen der Einflußgrößen B, p und q. *(Lösungshinweise unten beachten!)*

$x = x(B,p,q) \quad = \quad \boxed{}$

$y = y(B,p,q) \quad = \quad \boxed{}$

(ii) Wie hoch ist der größtmögliche Nutzen $U_{max} = U_{max}(B,p,q)$ des Haushaltes?

$U_{max} = U_{max}(B,p,q) \quad = \quad \boxed{}$

(iii) Wie wirkt sich eine Erhöhung des Preises p für das Gut X auf die Nachfrage y an Gut Y aus?

Antwort: ....

....

(iv) Läßt sich der Haushaltsnutzen (bei konstanten Preisen p und q) durch eine Verdoppelung des Budgets verdoppeln?

Antwort: ....

....

(v) Was geschieht mit Nachfragen und Maximalnutzen, wenn alle Preise und das Budget gleichzeitig verdoppelt werden?

Antwort: ....

....

Lösungshinweise:

(I) Wenden Sie die Methode des Lagrangeschen Multiplikators an und bestimmen Sie x und y als Koordinaten des stationären Punktes (x, y, λ) einer geeigneten Lagrange-Funktion $\mathbb{L}$.
Weitere Untersuchungen sind im Rahmen der Klausur nicht gefordert!

(II) Wer die Aufgabe nur mit konkreten Zahlenwerten statt mit den Variablen B, p, q lösen kann, verwende durchweg die Zahlenwerte $B = 108, p = 3$ und $q = 12$.
(Die Höchstpunktzahl verringert sich dadurch von 12 auf 9 Punkte!)

Lösungsweg:

Lagrangefunktion und Ableitungen:

$$\mathbb{L}(x,y,\lambda) = \boxed{}$$

$$\mathbb{L}_x(x,y,\lambda) = \boxed{}$$

$$\mathbb{L}_y(x,y,\lambda) = \boxed{}$$

$$\mathbb{L}_\lambda(x,y,\lambda) = \boxed{}$$

Weitere Rechnungen:

Eine Produktionsfunktion werde durch die Gleichung

$$p(x,y) = xye^{x^2+y^2-2}$$

$x, y \geqslant 0$, beschrieben. Dabei bezeichnen x bzw. y die eingesetzten Mengen zweier Produktionsfaktoren X bzw. Y und $p(x,y)$ den erzielten Output an einem Gut G.

1. Wie lautet das totale Differential der Funktion p

   – allgemein?

   $dp \quad =$ $\boxed{}$

   – an der Stelle $(x_0, y_0) = (1,1)$?

   $dp \quad =$ $\boxed{}$

   – Interpretation des zuletzt gefundenen Wertes: ....

   ....

   ....

2. Der momentane Faktoreinsatz sei $(x_0, y_0) = (1,1)$.

   a) In welchem Verhältnis sind die Einsatzmengen von X und Y (marginal) zu erhöhen, damit ein möglichst hoher Produktionszuwachs erzielt wird?

   Antwort: Steigerungsverhältnis $\Delta x : \Delta y \quad =$ $\boxed{}$

   b) Wie hoch ist die größtmögliche Zuwachsrate der Produktion?

   Antwort: $\boxed{}$

3. Wie lautet die Gleichung der durch den Punkt $(1,1)$ verlaufenden Höhenlinie von p?

   Antwort: $p(x,y) \quad =$ $\boxed{}$

4. Diese Gleichung kann in der Nähe des Punktes $(1,1)$ auf die Form $y = \varphi(x)$ gebracht werden. Ermitteln Sie die Ableitung $\frac{d}{dx}\varphi(x)$ der Funktion φ in Abhängigkeit von x und $y = \varphi(x)$ mit Hilfe impliziter Differentiation.

   Antwort: $\dfrac{d}{dx}\varphi(x) \quad =$ $\boxed{}$

5. Berechnen und interpretieren Sie:

$$\varphi'(1) \quad = \quad \boxed{}$$

Ökonomische Interpretation: ....

....

....

6. Streichen Sie grau unterlegte Teile der folgenden Sätze bzw. ergänzen Sie diese so, daß wahre Aussagen entstehen:

   a) p ist auf $[0,\infty)^2$ weder monoton wachsend noch monoton fallend , weil ....

   ....

   b) p ist auf $[0,\infty)^2$ nicht nach oben und jedoch nicht nach unten beschränkt, weil

   ....

   c) Die Isoquanten $\{p = p_0\}$, $p_0 > 0$, sind weder monoton wachsend noch monoton fallend und schneiden weder sowohl die $x-$Achse noch als auch die $y-$Achse.

Rechnungen/Konzept: