DEFINITHEIT UND MATRIXOPERATIONEN

ECOMATH – Dietz –

(Bezeichnungen: $a, b \in I\!R,\ n \in I\!N,\ A, B :$ symmetrische $(n, n)-$Matrizen)

Multiplikation

① Das Produkt "gleichsinniger" Faktoren ist definit:

$$\left\{\begin{array}{rl} & a > 0\,,\quad B \succ 0 \\ \vee & a < 0\,,\quad B \prec 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad aB \qquad 0$$

② Das Produkt "gegensinniger" Faktoren ist definit:

$$\left\{\begin{array}{rl} & a > 0\,,\quad B \prec 0 \\ \vee & a < 0\,,\quad B \succ 0 \end{array}\right\} \quad \Rightarrow \quad aB \qquad 0$$

③ Alle vorangehenden Aussagen bleiben richtig, wenn **beiderseits** von "$\Rightarrow$" das Gleichheitszeichen zugelassen wird.

④ NEU: Das Produkt eines definiten mit einem indefiniten Faktor ist

$$a \neq 0\,,\ B \asymp 0 \quad \Rightarrow \quad aB \qquad 0$$

Inversion

⑤ Eine (positiv oder negativ) definite Matrix ist invertierbar.
Bei der Inversion die "Definitheitsrichtung" .

$$\begin{array}{lcl} A \prec\!\succ 0 & \Rightarrow & A \text{ invertierbar; in diesem Fall} \\ A \succ 0 & \Leftrightarrow & A^{-1} \qquad 0 \\ A \prec 0 & \Leftrightarrow & A^{-1} \qquad 0 \end{array}$$

Achtung

⑥ Die Addition kann Definitheit zerstören:
$a > 0,\ b > 0 \quad \Rightarrow \quad a + b > 0$ ABER $A \succ 0,\ B \succ 0 \qquad\qquad A + B \qquad 0$

⑦ **Semi**definitheit ist für die Invertierbarkeit nicht hinreichend.

$$A \succcurlyeq 0 \qquad\qquad A \text{ invertierbar}$$

⑧ $\underbrace{A > 0}, B \succ 0 \qquad\qquad AB \qquad 0$
i.S. von $A \geqslant 0 \wedge A \neq 0$ (koordinatenweiser Vergleich)